ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1). $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$ 2). $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$.
3). $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$ 4). $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$.
5). $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$ 6). $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\cdot\alpha\cdot\beta$.
6). $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)$ 7). $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2)$
8). $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2-\ ...\ +\alpha^2\cdot\beta^{\nu-3}+\alpha\cdot\beta^{\nu-2}-\beta^{\nu-1})$
9). $\alpha-\beta=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2+\ ...\ \alpha^2\cdot\beta^{\nu-3}+\alpha\cdot\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
10). $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=\frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\cdot[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2]$
11).Αν $\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ (Ταυτοτ. Euler)

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμός: ν-οστη δύναμη αριθμού α ονομάζουμε τον αριθμό που προκύπτει ,αν πολλαπλασιάσουμε τον α, ν-φορές με τον εαυτό του.
Δηλαδή: $\alpha^\nu=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \cdots\ \cdot\alpha$ (ν-φορές)

<u>Ιδιότητες των δυνάμεων</u>

1). $\alpha^0=1$. 2). $\alpha^1=\alpha$. 3). $\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}$.
3). $\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu}=\alpha^{\nu-\mu}$. 4). $(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\cdot\mu}$. 5). $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.
6). $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$. 7). $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$. 8). $(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$.

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha \cdot x + \beta = 0$.

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, Μοναδική λύση.

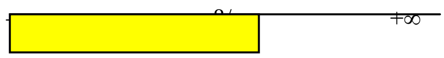
Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε $0 \cdot x = \beta \neq 0$ Αδύνατη.

Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε $0 \cdot x = 0$, Αόριστη

Επίλυση της ανισωσης $\alpha \cdot x + \beta > 0$.

Αν $\alpha > 0$ τότε $x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$, λύση της ανίσωσης.

Αν $\alpha < 0$ τότε $x < -\dfrac{\beta}{\alpha}$, λύση της ανίσωσης.



Αν $\alpha = 0$ τότε $0 \cdot x > 0$ Αόριστη ή Αδύνατη

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού ονομάζουμε την απόσταση του από το σημείο 0 του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα: $|-1| = 1$ και $|2| = 2$ και $|-3| = 3$.

Δηλαδή, αριθμητικά το απόλυτο ενός αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημο του.

Ο αλγεβρικός ορισμός του απόλυτου είναι στην ουσία του μια κλαδική συνάρτηση που εξασφαλίζει ανεξάρτητα από το πρόσημο της μεταβλητής ποσότητας x την θετικότητα της. Συγκεκριμένα.

Ο ορισμός λέει: $|x| = \left\{ \begin{array}{l} x,\ \alpha\nu\ x \geq 0 \\ -x,\ \alpha\nu\ x \prec 0 \end{array} \right\}$.

Ιδιότητες των απόλυτων

1). $|x| \geq 0$ 2). $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ 3). $|x| = \pm x$

4). $|x| \geq x$ 5). $|x| > -x$ 6). $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

7). $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$. 8). $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

9). $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow \{\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta\}$ 10). $|\alpha| > |\beta| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha \succ |\beta| \\ \alpha \prec -|\beta| \end{matrix}\right\}$.

11). $|\alpha| < \theta \Rightarrow -\theta < \alpha < \theta$ 12). $|\alpha| > \theta \Rightarrow \{\alpha > \theta$ ή $\alpha < -\theta\}$

Εφαρμογές,

1). Να δειχθεί ότι: α). $|x| = \theta \Rightarrow x = \pm\theta$ όπου $\theta > 0$.

β). $|x| < \theta \Rightarrow -\theta < x < \theta$ όπου $\theta > 0$.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Για αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in R$ ισχύουν τα παρακάτω:

1). ($\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$) $\Rightarrow \alpha > \gamma$ 2). $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

3). ($\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) $\Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

4). ($\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$) $\Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

5). Αν $\lambda > 0$ τότε: $\alpha > \beta \Rightarrow \lambda \cdot \alpha > \lambda \cdot \beta$ και

6). Αν $\lambda < 0$ τότε: $\alpha > \beta \Rightarrow \lambda \cdot \alpha < \lambda \cdot \beta$ και

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μεταξύ ανισωτικων σχέσεων απαγορεύονται οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι σχέσεις διάταξης $<$, $>$ ορίζονται ως εξής για $\alpha, \beta \in R$:

ΡΙΖΕΣ

ν-οστη ρίζα αριθμού $\theta > 0$ Ονομάζουμε έναν άλλο αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει: $\rho^{\nu} = \theta$. ($\rho^{\nu} = \theta \Rightarrow \rho = \sqrt[\nu]{\theta}$.).

Ιδιότητες των ριζών

1). $\sqrt[\nu]{a} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ 2). $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ 3). $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$

4). $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ 5). $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$ 6). $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

7). $x^{2\cdot\nu} = \theta \Rightarrow x = \pm\sqrt[2\cdot\nu]{\theta},\ \theta \succ 0$

8). $x^{2\cdot\nu+1} = \theta \Rightarrow x = \sqrt[2\cdot\nu+1]{\theta},\ \theta \in R$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1). Να λυθούν οι εξισώσεις

α). $(x-\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 0$ β). $(x^2-1) + (x-1)^2 = 0$

γ). $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2-x}{x^2-1}$ δ). $x + \dfrac{1}{x} = 2\cdot x$

ε). $|3 - 2\cdot x| = 1$ στ). $|x| + 3 = |x+2| + x$

ζ). $(\lambda-4)\cdot x + 9 = (2-\lambda)\cdot x + \lambda^2$ η). $\lambda\cdot x + \lambda^2 = \mu\cdot(x + 2\cdot\lambda) - \mu^2$

2). Να λυθούν οι ανισώσεις:

α). $\lambda^2\cdot x + 2 \geq 3 - \mu^2\cdot x$ β). $(x-1)^2 + 3 > (x+1)^2 + 2$

γ). $\dfrac{|x|}{|x|+1} - \dfrac{|x|-1}{|x|} \succ \dfrac{2}{x^2+|x|}$ δ). $\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{2}{x} \leq 6$

ε). $|2\cdot x + 1| > 3\cdot x - 2$ στ). $\lambda\cdot x + \lambda^2 \leq x + 1$

3). Να δειχθούν οι κάτωθι σχέσεις:

α). $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \dfrac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\cdot[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2]$

β). Αν $\alpha + \beta + \gamma > 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq 3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

γ). $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \dfrac{1}{|x|} \geq 2$

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συνάρτηση ονομάζουμε την διμελη σχέση (δηλ. την σχέση δυο συνόλων) κατά την οποία κάθε στοιχείο του ενός συνόλου αντίστοιχη σε ένα και μόνο στοιχείο του άλλου συνόλου.[$y = f(x)$].
Συμβολικά $x \xrightarrow{f} f(x)$

Πεδίο ορισμού ονομάζουμε το πρώτο σύνολο της συνάρτησης με την μεταβλητή x η οποία ονομάζετε αυθαίρετη.
Συμβολίζεται με Α.
Σύνολο τιμών ονομάζουμε το δεύτερο σύνολο της συνάρτησης με την μεταβλητή y που ονομάζετε εξαρτημένη μεταβλητή.
Συμβολίζεται με f(A).

Γράφημα μιας συνάρτησης ονομάζουμε όλα τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης $y = f(x)$.
Συμβολίζεται με G_f

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζουμε την απεικόνιση του γραφήματος της σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
Συμβολίζεται με C_f

<u>Είδη συναρτήσεων</u>

→ Συνάρτηση "1-1". Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο Α
είναι "1-1" Αν $\forall x_1, x_2 \in A$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
[ή να ισχύει $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$]

→ Συνάρτηση άρτια. Μια συνάρτηση με συμμετρικό πεδίο ορισμού σύνολο Α
είναι άρτια αν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ έτσι ώστε $f(-x) = f(x)$.

→ Συνάρτηση περιττή. Μια συνάρτηση με συμμετρικό πεδίο ορισμού σύνολο Α
είναι περιττή αν $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ έτσι ώστε $f(-x) = -f(x)$.

→ Συνάρτηση Μονότονη. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο Α
Είναι μονότονη όταν ικανοποιεί κάποια από τις σχέσεις:
$\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ η f είναι γν. αύξουσα.
$\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ η f είναι γν. φθίνουσα.
$\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ η f είναι αύξουσα.
$\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ η f είναι φθίνουσα.

→ Ακρότατα συνάρτησης. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α έχει:
Μέγιστο στο $x_0 \in A$, αν $\forall x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.
Ελάχιστο στο $x_0 \in A$, αν $\forall x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

ΜΕΛΕΤΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συνάρτηση $y = \alpha \cdot x + \beta$ (Ευθεία)

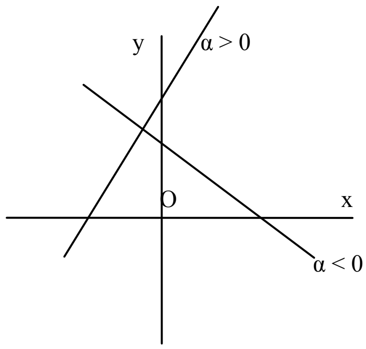
1). Πεδίο ορισμού: R

2). Πεδίο τιμών: R

3).μονοτονία: Αν $\alpha > 0$ η f γνησ.αυξουσα

Αν $\alpha < 0$ η f γνησ.φθινουσα

4).Γραφική παράσταση:



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Έστω οι ευθείες (ε_1): $y = \alpha_1 \cdot x + \beta_1$ (ε_2): $y = \alpha_2 \cdot x + \beta_2$

$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ (Συνθήκη παραλληλίας).

$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$. (Συνθήκη καθετότητας).

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \dfrac{\alpha}{x}$ (ΜΕΛΕΤΗ)

1). Πεδίο ορισμού: R^*

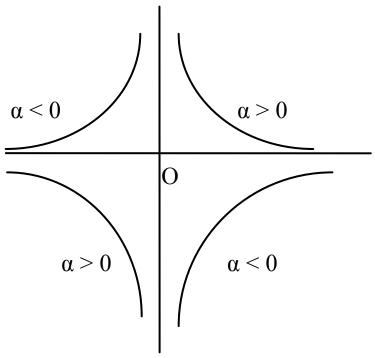
2). Σύνολο τιμών : R^*

3).μονοτονία: Αν $\alpha > 0$ η f γν. φθίνουσα

Αν $\alpha < 0$ η f γν. αύξουσα.

4).Ιδιότητες : Είναι περιττή συνάρτηση.

5). Γραφική παράσταση:



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha \cdot x^2$ (ΜΕΛΕΤΗ)

1). Πεδίο ορισμού: R

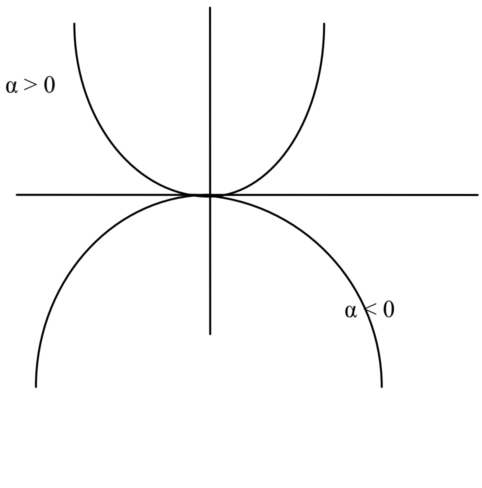
2). Πεδίο τιμών: αν $\alpha > 0$ το R^+

αν $\alpha < 0$ το R^-

3).μονοτονία: Αν $\alpha > 0$ $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$

Αν $\alpha < 0$ $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$

4).Ιδιότητες : Είναι άρτια συνάρτηση.



ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y = \gamma_1 \\ \alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y = \gamma_2\end{array}\right\} \ (\Sigma)$$

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με την μέθοδο των οριζουσων πρέπει να υπολογίσουμε τις τρεις ορίζουσες.

Ορίζουσα των συντελεστών: $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$

Οριζουσα του άγνωστου x : $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$

Ορίζουσα του άγνωστου y: $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

Διερεύνηση:

1). Αν $D \neq 0$. Τότε το σύστημα έχει μια λύση η οποία είναι:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{D_X}{D}, \frac{D_Y}{D}\right)$$

2). Αν D = 0. Τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.

α). Αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ είναι Αδύνατο

β) Αν $D_x = D_y = 0$ είναι Αόριστο.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ - ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΡΙΖΩΝ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Έστω τριωνυμικη εξίσωση: $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ Η οποία δέχεται δυο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε ορίζονται τα παρακάτω:

Άθροισμα ριζών του τριώνυμου: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

Γινόμενο ριζών του τριώνυμου: $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Γνωρίζοντας τις δυο ρίζες ενός τριώνυμου μπορούμε να προσδιορίσουμε το τριώνυμο τους δεδομένου ότι ισχύει: $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = x^2 - S \cdot x + P$.
Όπου S - το άθροισμα και P - το γινόμενο των ριζών του τριώνυμου.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ (γενική μορφή Παραβολής)

1). Πεδίο ορισμού: R.

2). Πεδίο τιμών: Αν $\alpha > 0$ τότε $\left[-\frac{\Delta}{4\cdot\alpha},+\infty\right)$

Αν $\alpha < 0$ τότε $\left[-\infty,-\frac{\Delta}{4\cdot\alpha}\right)$

3).μονοτονία: Αν $\alpha > 0$ τότε $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\cdot\alpha}\right)\downarrow\left(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha},+\infty\right)\uparrow$

Αν $\alpha < 0$ τότε $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\cdot\alpha}\right)\uparrow\left(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha},+\infty\right)\downarrow$

4).Ακρότατα (είδος ακρότατου):

Η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στην θέση $A\left(-\frac{\beta}{2\cdot\alpha},-\frac{\Delta}{4\cdot\alpha}\right)$

Αν το $\alpha > 0$ έχουμε Ελάχιστο.
Αν το $\alpha < 0$ έχουμε Μέγιστο.

Εφαρμογή

α).Να διατυπώσετε τους τύπους του Vieta
β).Να τους αποδείξετε
γ).Να εκφράσετε το τριώνυμο $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$ με την βοήθεια του αθροίσματος και του γινόμενου των ριζών.

Απάντηση

α). Αν το τριώνυμο $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$ έχει θετική διακινούσα και άρα δυο ρίζες x_1, x_2 ισχύουν τα κάτωθι:

Άθροισμα ριζών: $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$

Γινόμενο ριζών: $P = x_1\cdot x_2 =$

$$\left(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = -\frac{\beta^2-\sqrt{\Delta}^2}{4\cdot\alpha^2} = -\frac{\beta^2-\Delta}{4\cdot\alpha^2} = \frac{4\cdot\alpha\cdot\gamma}{4\cdot\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha\cdot\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}\cdot x+\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}\cdot x+\frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Rightarrow x^2 - S\cdot x + P = 0$$