ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΜΑΔΑ Α

1). Αν το σημείο Μ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε (ΑΜ) = 3·(ΜΒ) και Ο ένα σημείο αναφοράς, να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

2). Αν το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε (ΑΜ) = 3·(ΜΒ) και Ο ένα σημείο αναφοράς, να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

3). Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ. Ονομάζουμε Δ το μέσο του τμήματος ΑΜ και Ε το σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}, \overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Β,Δ και Ε είναι συνευθειακά.

4). Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (3, 4) έχει μέτρο 5. Μπορείτε να βρείτε ένα διάνυσμα ομόρροπο και ένα αντίρροπο που να έχουν μέτρο 1;

5). Είναι αληθής η ισότητα $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \det\left(\vec{\beta},\vec{\alpha}\right)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6). Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις: $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \vec{0}$ και $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) \neq 0$.

7). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2), \vec{\beta} = (2,1), \vec{\gamma} = (8,7)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο διανυσμάτων.

8). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2), \vec{\beta} = (2,4), \vec{\gamma} = (8,7)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο διανυσμάτων.

9). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2), \vec{\beta} = (2,4), \vec{\gamma} = (3,6)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο διανυσμάτων.

10). Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ. Ονομάζουμε Δ το σημείο που ορίζεται από την ισότητα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \kappa \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \kappa \neq 2,$ και Ε το σημείο τομής των ευθειών ΒΔ και ΑΓ. Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι παράλληλα υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = x \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Να εκφραστεί ο πραγματικός αριθμός x ως συνάρτηση του κ.

11). Να βρείτε τα κ,λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa^2 + 12,1), \vec{\beta} = (2\kappa - \lambda^2,1)$, είναι παράλληλα.

12). Πότε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων ;

13). Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1), \vec{\beta}=(-1,-1)$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ = 1. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σχηματίζουν την ίδια γωνία με τον άξονα x; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

14). Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\sqrt{3}), \vec{\beta}=(-1,\sqrt{3}), \vec{\gamma}=(-1,-\sqrt{3}), \vec{\delta}=(1,-\sqrt{3})$ με τον άξονα x′x.

15). Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1), \vec{\beta}=(1,\sqrt{3})$;

16). Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1), \vec{\beta}=(1,\sqrt{3})$;

17). Ποια γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,2), \vec{\beta}=(-\sqrt{3},-1)$;

18). Έστω $\overrightarrow{OA}=(1,2), \overrightarrow{OB}=4\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$, Γ(−1, 8). Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΟΜΑΔΑ Β ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1). Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, ώστε : $\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{AE}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β Συμπίπτουν.

2). Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ. Δείξτε ότι :

α). Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου το διάνυσμα $2\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}-5\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$, είναι ανεξάρτητο του Μ.

β). Δεν υπάρχει σημείο Κ ώστε να ισχύει : $2\cdot\overrightarrow{KA}+3\cdot\overrightarrow{KB}=5\cdot\overrightarrow{K\Gamma}$.

3). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}.\vec{\beta}.\vec{\gamma}$ τα οποία ανά δύο είναι μη συγγραμμικά. Αν $\vec{\alpha}//\left(\vec{\beta}+2\cdot\vec{\gamma}\right)$, και $\vec{\beta}//\left(\vec{\gamma}+2\cdot\vec{\alpha}\right)$, να δείξετε ότι : $\vec{\beta}=-4\cdot\vec{\alpha}-2\cdot\vec{\gamma}$.

4). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Αν ισχύει με $\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{A\Delta}+y\cdot\overrightarrow{AE}$, με x + y = 2, να δείξετε ότι :

α). $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

β). τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5). Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{\Gamma M}=-\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, με λ ∈ R (μεταβλητός) , να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε μια ευθεία για κάθε λ ∈ R.

6). Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ ώστε : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$.

7). Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και Μ σημείο ώστε $\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, με x + y = 1.
Να αποδείξετε ότι τα Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

8). Έστω τα μη συγγραμμικά ανά δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta}//\left(\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right)$.
Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$.

9). Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$, με λ ∈ R, να δείξετε ότι το Μ ανήκει σε μια ευθεία.

10). Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και κ, λ, μ ∈ R ώστε κ + λ + μ = 0. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\kappa \cdot \overrightarrow{MA} + \lambda \cdot \overrightarrow{MB} + \mu \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

11). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 2) και $\vec{\beta}$ = (2, 3).

α). Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = -10 \cdot \vec{\alpha} + 6 \cdot \vec{\beta}$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x′x.

β). Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}$ = (8, 13) ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Στη συνέχεια να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη στο $\vec{\beta}$.

12). Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1, 5), Β(–6,3) και Γ(2, 1) .

α). Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

β). Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ = (λ, λ) , λ ∈ R είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{AM}$, για κάθε λ ∈ R.

γ). Να υπολογίσετε το λ, ώστε $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$.

13). Δίνονται τα σημεία Α(1, –3/2), Β(2, –1) και $M\left(\alpha, \dfrac{\alpha-4}{2}\right)$, όπου α ∈ R.

α). Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Μ είναι συνευθειακά για κάθε α ∈ R.

β). Αν $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, να υπολογίσετε το α.

γ). Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α έτσι ώστε : $\left|\overrightarrow{OM}\right| < \dfrac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}$.

14). Έστω τα σημεία Α(x – y, y), Β(2·x + y, 2·y), όπου x, y ∈ R. Να βρείτε τα x, y, έτσι ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x′x και $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = 2.

15). Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(α, α + 2), Β(β – 2, β), Γ(1, –1) και Δ(0, –2) με α, β ∈ R είναι συνευθειακά.

16). Έστω $\vec{\alpha}$ = (1, –2) και $\vec{\beta}$ = (4, 1).

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = 2 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β). Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ = (3, 5) σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

17). Έστω τα σημεία Α(1, 3) και Β(3, 2).

α). Αν Μ(x, y) και $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$, να αποδείξετε ότι x + y = 7.

β). Αν $\overrightarrow{AN} = 2 \cdot \overrightarrow{NB}$ να υπολογίσετε τις συν/νες του Ν.

18). Δίνονται τα σημεία Α(x, y) και Β(−y, x) με x, y $\in$R. Να υπολογίσετε τα x, y $\in$ R έτσι ώστε $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 8\cdot\sqrt{2}$, και το $\overrightarrow{OA}$ να σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα x′x.

19). Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (2, –3) και $\vec{\beta}$ = (1, 4). Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\vec{\alpha} + 3\cdot\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\cdot\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

20). Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και το ύψος του ΑΔ.
Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα :
1). $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ 2). $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ 3). $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{BA}$

21). Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $\left|\vec{\alpha}\right|$ = 1 , $\left|\vec{\beta}\right|$ = 2 και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Να Υπολογίσετε :

i). το γινόμενο $\left(\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\cdot\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

ii).το μέτρο του διανύσματος : $3\cdot\vec{\alpha} - 2\cdot\vec{\beta}$.

iii).το συνημίτονο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}, 2\cdot\vec{\alpha} + \vec{\beta}}\right)$.

22). Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ώστε : $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1$, $\left|\vec{\gamma}\right| = \sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

i). Να δείξετε ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και

ii).Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$.

23). Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $4\cdot\left|\vec{\alpha}\right| = 3\cdot\sqrt{3}\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ και $\vec{\alpha} \perp \left(2\cdot\vec{\alpha} - 3\cdot\vec{\beta}\right)$.

Να αποδείξετε ότι: $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

24). Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, που είναι τέτοια Ώστε : $\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} + 2\cdot\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, ανήκουν σε μια ευθεία.

25). Έστω $\vec{\alpha}$ = (–3, 4) και $\vec{\beta}$ = (1, 2). Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$.

26). Δίνεται το σταθερό σημείο Α. Αν τα σημεία Ο, Μ είναι τέτοια ώστε :
$\overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OA}^2 = 4\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε έναν κύκλο.

27). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3, 4) και $\vec{v}$ = (–1, –2).

i). Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

ii).Να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη και η άλλη κάθετη στο $\vec{\alpha}$.

28). Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\kappa\cdot\vec{\alpha}-\lambda\cdot\vec{\beta}$, με κ, λ ∈ R.

Να δείξετε ότι τα $\vec{u},\vec{v}$, είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

29). Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, που ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, ανήκουν σε μια ευθεία.

30. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα και με $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Να υπολογίσετε το συν$\left(2\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.

31). Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, με $\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\frac{\left|\vec{\gamma}\right|}{2}$. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\alpha}+4\cdot\vec{\beta}\right)$.

32). Έστω το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\beta}\right|$ = 1 και $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|$ = $\frac{1}{2}$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.