ΣΥΝΟΠΤΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1). Είναι $i^2 = -1$.

2). Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = α + i \cdot β$, όπου $α, β \in R$.

3). Αν $z = α + β \cdot i$, $α, β \in R$ τότε ο α λέγεται πραγματικό μέρος του z και σημειώνεται Re(z), ενώ ο β λέγεται φανταστικό μέρος του z και σημειώνεται Im(z).

4). Στο C κάθε πραγματικός αριθμός α εκφράζεται ως $α + 0 \cdot i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός $β \cdot i$ εκφράζεται ως $0 + i \cdot β$.

5). Ισχύει πάντα η ισοδυναμία : $α + i \cdot β = γ + i \cdot δ \Leftrightarrow \{ α = γ \text{ και } β = δ \}$

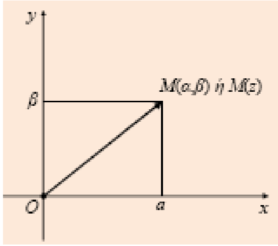
6). Ισχύει πάντα η ισοδυναμία : $α + i \cdot β = 0 \Leftrightarrow \{ α = 0 \text{ και } β = 0 \}$.

7). Στο ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί η απάντηση είναι όχι! δηλαδή στο C η διάταξη και οι ιδιότητές της δεν μεταφέρονται.

8). Κάθε μιγαδικό $α + i \cdot β$ τον αντιστοιχίζουμε στο σημείο Μ(α, β) ενός καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα. Το σημείο Μ λέγεται εικόνα του μιγαδικού $α + i \cdot β$. Το σημείο Μ(α, β) το συμβολίζουμε και με Μ(z).

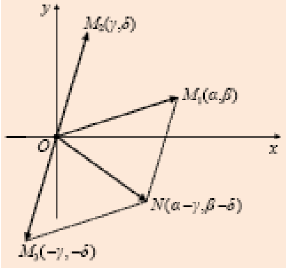
9). Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών λέγεται μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας x′x λέγεται πραγματικός άξονας και σε αυτόν ανήκουν τα σημεία Μ(α, 0) που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $α = α + 0 \cdot i$, ενώ ο άξονας y′y λέγεται φανταστικός άξονας και σε αυτόν ανήκουν σημεία Μ(0, β) που είναι εικόνες των φανταστικών $β \cdot i = 0 + β \cdot i$.

10). Ένας μιγαδικός $z = α + β \cdot i$, παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$, του σημείου Μ(α, β).



11). Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους μιγάδες :
$(α + β \cdot i) + (γ + δ \cdot i) = (α + γ) + (β + δ) \cdot i$.
$(α + β \cdot i) - (γ + δ \cdot i) = (α - γ) + (β - δ) \cdot i$.

12). Αν $M_1(α, β)$ και $M_2(γ, δ)$ είναι οι εικόνες των $α + β \cdot i$ και $γ + δ \cdot i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε :
→ το άθροισμα $(α + β \cdot i) + (γ + δ \cdot i) = (α + γ) + (β + δ) \cdot i$ παριστάνεται με το σημείο $Μ(α + γ, β + δ)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή "Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $α + β \cdot i$ και $γ + δ \cdot i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".



→ η διαφορά $(α + β \cdot i) - (γ + δ \cdot i) = (α - γ) + (β - δ) \cdot i$ παριστάνεται με το σημείο $Ν(α - γ, β - δ)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$

δηλαδή: "Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α + β·i και γ + δ·i είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους".

13). Ο πολλαπλασιασμός στους μιγάδες : (α + β·i)·(γ + δ·i) = α·(γ + δ·i) + β·i·(γ + δ·i) =
= α·γ + α·δ·ί + β·γ·i + (β·i)·(δ·i) = α·γ + α·δ·i + β·γ·i + β·δ·i^2 = α·γ + α·δ·i + β·γ·i – β·δ =
= (α·γ – β·δ) + (α·δ + β·γ)·i.

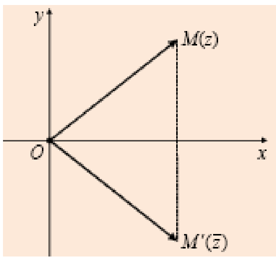
14). Η διαίρεση στους μιγάδες :
Αν γ + δ·i ≠ 0, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή το παρονομαστή και έχουμε : $\frac{\alpha+\beta\cdot i}{\gamma+\delta\cdot i}=\frac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}+i\cdot\frac{\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}$.

15). Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται όπως και στου Πραγματικούς : $z^1 = z$, $z^2 = z\cdot z$, . . . , και γενικά $z^\nu = z^{\nu-1}\cdot z$, για κάθε θετικό ακέραιο ν, με ν > 1.
Επίσης, αν z ≠ 0, ορίζουμε $z^0 = 1$, $z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu}$, για κάθε θετικό ακέραιο ν.
Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν κα για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών.

16). Δυνάμεις του i : $i^0 = 1$ $i^1 = 1$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

και γενικά, $i^\nu = i^{4\cdot\rho+\upsilon} = i^{4\cdot\rho}\cdot i^\upsilon = (i^4)^\rho\cdot i^\upsilon = 1^\rho\cdot i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{Bmatrix} 1, & \alpha\nu\ \upsilon=0 \\ i, & \alpha\nu\ \upsilon=1 \\ -1, & \alpha\nu\ \upsilon=2 \\ -i, & \alpha\nu\ \upsilon=3 \end{Bmatrix}$.

17). Ο αριθμός α – β·i λέγεται συζυγής του α + β·i και συμβολίζεται με α + β·i. Δηλαδή, α + β·i = α – β·i. Επειδή είναι και α – β·i = α + β·i, οι α + β·i, α – β·i λέγονται συζυγείς μιγαδικοί.
Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α, β) και Μ′(α, –β) δύο συζυγών μιγαδικών z = α + β·i και z = α – β·i είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



18). Ισχύουν οι σχέσεις $z + \bar{z} = 2\cdot\alpha = 2\cdot Re(z)$ και $z - \bar{z} = 2\cdot\beta\cdot i = 2\cdot Im(z)\cdot i$.

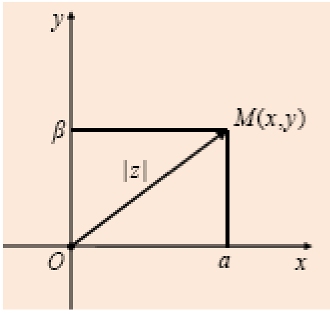
19). Αν z_1 = α + β·i και z_2 = γ + δ·i είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε :
$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\overline{z^\nu} = \bar{z}^\nu$

20). Επίλυση της Εξίσωσης $\alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$ με α, β, γ ∈ R και α ≠ 0.
Δ > 0, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις : $z_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
Δ = 0, η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση : $z = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

$\Delta < 0$, η εξίσωση έχει 2 λύσεις που είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

Για τις δυο ρίζες ισχύουν οι τύποι του είναι : $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

21). Έστω M(x, y) η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i \cdot y$ στο μιγαδικό επίπεδο, ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

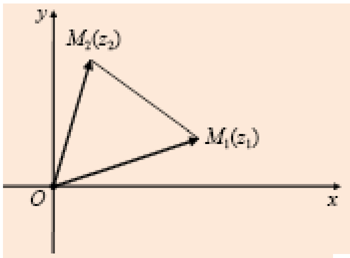


Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής $z = x + 0 \cdot i = x \in R$, τότε $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x.

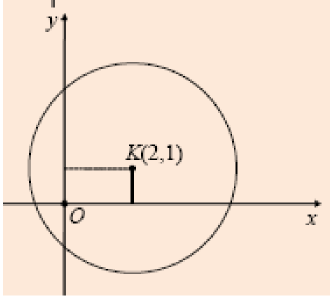
22). Ιδιότητες του μέτρου : $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z^\nu| = |z|^\nu$. (Η τριγωνική ανισότητα) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

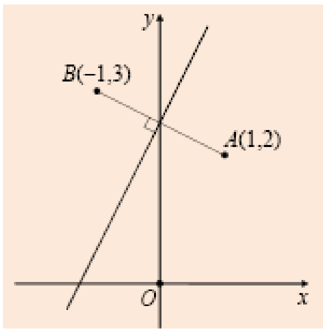
23). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους, δηλαδή ισχύει ότι : $(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$.



24). Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ. Για παράδειγμα, η εξίσωση $|z - (2 + i)| = 3$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $2 + i$, δηλαδή από το σημείο K(2, 1), απόσταση 3 μονάδες. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο K(2,1) και ακτίνα $\rho = 3$.



25). Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τις εικόνες των z_1, z_2. Για παράδειγμα, η εξίσωση $|z - (1 + 2 \cdot i)| = |z - (-1 + 3 \cdot i)|$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $1 + 2 \cdot i$ και $-1 + 3 \cdot i$, δηλαδή από τα σημεία A(1, 2) και B(–1, 3). Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της " μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.



26). Αν $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$, επίσης αν $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow z \in R$.

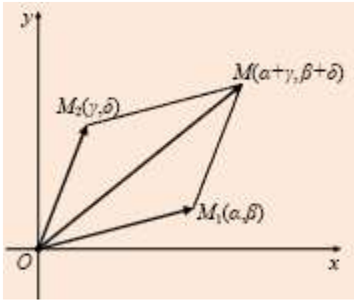
27). Αν $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in C$, επίσης αν $|z|^2 = -z^2 \Leftrightarrow z \in C$.

28). Αν $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z\cdot\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$,

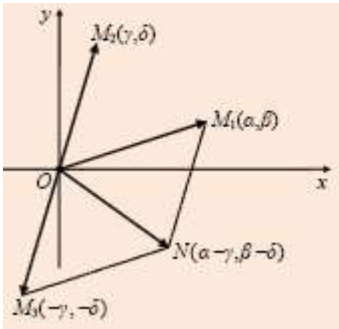
και γενικά : αν $|z| = κ$, $κ > 0 \Leftrightarrow |z|^2 = κ^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} = κ^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{k^2}{z}$.

ΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1
Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $α + β\cdot i$ και $γ + δ\cdot i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
Απόδειξη
Αν $M_1(α, β)$ και $M_2(γ, δ)$ είναι οι εικόνες των $α + β\cdot i$ και $γ + δ\cdot i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $(α + β\cdot i) + (γ + δ\cdot i) = (α + γ) + (β + δ)\cdot i$ παριστάνεται με το σημείο $M(α + γ, β + δ)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 2
Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $α + β\cdot i$ και $γ + δ\cdot i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
Απόδειξη
Η διαφορά $(α + β\cdot i) - (γ + δ\cdot i) = (α - γ) + (β - δ)\cdot i$ παριστάνεται με το σημείο $N(α - γ, β - δ)$. Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (οι δυνάμεις του i)
Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $ν = 4\cdotρ + υ$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε :

$$i^ν = i^{4\cdotρ+υ} = i^{4\cdotρ}\cdot i^υ = (i^4)^ρ\cdot i^υ = 1^ρ\cdot i^υ = i^υ = \begin{cases} 1, & αν\ \ υ=0 \\ i, & αν\ \ υ=1 \\ -1, & αν\ \ υ=2 \\ -i, & αν\ \ υ=3 \end{cases}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (Συζυγής αθροίσματος)
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
Απόδειξη

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{\alpha+\beta i \ + \ \gamma+\delta i} = \overline{\alpha+\gamma \ + \ \beta+\delta \ \cdot i} = \alpha+\gamma \ - \ \beta+\delta \ \cdot i =$$
$$\alpha+\gamma-\beta\cdot i-\delta\cdot i = \alpha-\beta\cdot i+\gamma-\delta\cdot i = \overline{\alpha+\beta\cdot i}+\overline{\gamma+\delta\cdot i} = \overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5
Επίλυση της Εξίσωσης $α\cdot z^2 + β\cdot z + γ = 0$ με $α, β, γ \in R$ και $α \neq 0$.
Απόδειξη

Μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή : $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$,

όπου $Δ = β^2 - 4\cdotα\cdotγ$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

$\Delta > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δυο πραγματικές λύσεις : $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

$\Delta = 0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση : $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

$\Delta < 0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2} = \dfrac{-1 \quad -\Delta}{4\alpha^2} = \dfrac{i^2\sqrt{-\Delta}^2}{4\alpha^2} = \left(\dfrac{i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται :

$\left(z + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι : $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ισχύουν και εδώ ισχύουν οι σχέσεις (τύποι του Vieta) : $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Απόδειξη

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow \; z_1 \cdot z_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} \; = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}$, και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

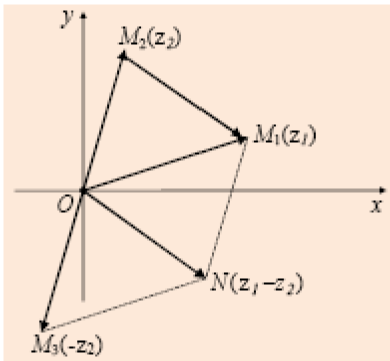
ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Απόδειξη

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON} = z_1 - z_2$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$.

$|\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = |z_1 - z_2|$, δηλαδή : $(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1). Η ισότητα $x + (y - 1)\cdot i = 3 + 4\cdot i$ ισχύει αν και μόνο αν
[Α]. $x = 3$ ή $y = 5$ [Β]. $x = 3$ και $y = 4$
[Γ]. $x = 3$ ή $y = 4$ [Δ]. $x = 3$ και $y = 5$ [Ε]. $x + y = 7$

2). Αν $i^2 = -1$ και $[(i^2)^3] = 1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι
[Α]. 1 [Β]. 3 [Γ]. 6 [Δ]. 2 [Ε]. 5

3). Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση
[Α]. $y = x$ [Β]. $y = -x$ [Γ]. $y = 0$ [Δ]. $x = 0$
[Ε]. σε καμία από τις προηγούμενες.

4). Οι εικόνες των μιγαδικών $2 + 3\cdot i$ και $3 + 2\cdot i$ στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία
[Α]. $x = 2$ [Β]. $y = 3$ [Γ]. $y = x$ [Δ]. $y = -x$ [Ε]. $x = 0$

5). Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο
[Α]. $2 + i$ [Β]. $-2 + 2\cdot i$ [Γ]. $2 + 2\cdot i$ [Δ]. $-2 - 2\cdot i$ [Ε]. $-2 - i$

6). Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας $2\cdot x + 3\cdot y - 1 = 0$, τότε ο z δεν μπορεί να είναι ο
[Α]. 1/2 [Β]. $1 - 1/3$ [Γ]. $5 - 3\cdot i$ [Δ]. 1/3 [Ε]. $1 + 2\cdot i$

7). Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)\cdot i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + i\cdot y$ ισούται με :
[Α]. $1 - i$ [Β]. $1 + i$ [Γ]. $-1 - i$ [Δ]. $-1 + i$ [Ε]. $2 + 2\cdot i$

8). Αν $\nu \in N$, από τις παρακάτω ισότητες δεν είναι σωστή η
[Α]. $i^{4\cdot\nu} = 1$ [Β]. $I^{4\cdot\nu+1} = -i$ [Γ]. $i^{4\cdot\nu+2} = -1$ [Δ]. $i^{\nu+4} = i$ [Ε]. $I^{4\cdot\nu+3} = -i$

9). Αν $z = \alpha + \beta\cdot i$ με $\alpha\cdot\beta \neq 0$ και z ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι σωστή;
[Α]. $z + \bar{z}$ πραγματικός αριθμός [Β]. $z - \bar{z}$ φανταστικός αριθμός
[Γ]. $z\cdot \bar{z}$ φανταστικός αριθμός [Δ]. $-\overline{\bar{z}\cdot z}$ πραγματικός αριθμός
[Ε]. $\overline{z + \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός

10). Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά
[Α]. ως προς τον άξονα y′y [Β]. ως προς τον άξονα x′x.
[Γ]. ως προς την ευθεία $y = x$ [Δ]. ως προς την ευθεία $y = -x$
[Ε]. ως προς την αρχή των αξόνων

11). Η εξίσωση $z^2 - 6\cdot z + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζα τον αριθμό.
[Α]. i [Β]. $1 - i$ [Γ]. $1 + i$ [Δ]. $2 - i$ [Ε]. $3 + i$

12). Η εξίσωση $x^2 + α\cdot x + 5 = 0$, $α \in R$. μπορεί να έχει ρίζα τον
[Α]. $-3 + i$ [Β]. $2 - i$ [Γ]. $1 - i$ [Δ]. $3 - i$ [Ε]. $-3 - i$

13). Αν η εξίσωση $z^2 - κ\cdot z + λ = 0$, $κ, λ \in Z$ έχει ρίζα τον $2 + i$, τότε ισχύει
[Α]. $κ = 6$ και $λ = 5$ [Β]. $κ = 4$ και $λ = 1$ [Γ]. $κ = 3$ και $λ = 4$
[Δ]. $κ = 4$ και $λ = 5$ [Ε]. $κ = 5$ και $λ = 4$

14). Αν $z = x + i\cdot y$ ποια από τις παρακάτω ισότητες δεν είναι πάντα σωστή;
[Α]. $|z| = |\bar{z}|$ [Β]. $|z| = |-z|$ [Γ]. $|z|^2 = z^2$
[Δ]. $|z|^2 = x^2 + (-y^2)$ [Ε]. $|z^2| = |\bar{z}|^2$

15). Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3\cdot i$, τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι
[Α]. 5 [Β]. 8 [Γ]. 9 [Δ]. 12 [Ε]. 14

16). Αν $|\overline{z_1}| = 2$ και $|-z_2| = 5$ τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι
[Α]. 2 [Β]. 3 [Γ] . 5 [Δ]. 7 [Ε]. 10

17). Αν $z = 3 + y\cdot i$ και $|z| = 5$, τότε μια τιμή του γ είναι η
[Α]. 5 [Β]. $\sqrt{5}$ [Γ]. -4 [Δ]. $\sqrt{3}$ [Ε]. 3

18). Αν οι εικόνες δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι στο ίδιο τεταρτημόριο, ποια από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει :
[Α]. $z_1 = -z_2$ [Β]. $z_1 = z_2$ [Γ]. $z_1 = -z_2$
[Δ]. $Im(z_1) + Im(z_2) = 0$ [Ε]. κανένα από τα παραπάνω

19). Αν το σημείο Ρ (x, y) είναι εικόνα του μιγαδικού $z = x + y\cdot i$ στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 3| = 5$, το Ρ βρίσκεται πάνω σε
[Α]. ευθεία [Β]. έλλειψη [Γ]. κύκλο [Δ]. παραβολή [Ε]. υπερβολή

20). Η εξίσωση $|z - (1 + 2\cdot i)| = 4$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με
[Α]. κέντρο (– 1, 2) και ακτίνα 4 [Β]. κέντρο (1, –2) και ακτίνα 2
[Γ]. κέντρο (1, – 2) και ακτίνα 4 [Δ]. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2
[Ε]. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

21). Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 10. Από τους παρακάτω αριθμούς έχει εικόνα πάνω στον κύκλο ο μιγαδικός αριθμός
[Α]. $z = \sqrt{2} + 3\cdot i$ [Β]. $z = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$ [Γ]. $z = 2 - i\cdot \sqrt{8}$
[Δ]. $z = 8 + 6\cdot i$ [Ε]. $z = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{8}$.

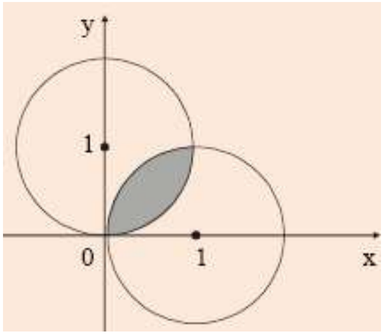
22). Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι :
[Α]. ο άξονας y′y [Β]. η ευθεία y = x [Γ]. Ο άξονας x′x.
[Δ]. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)
[Ε]. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

23). Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2, 1) και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού ζ για τον οποίο ισχύει
[Α]. $|z - (2 - i)| = 3$ [Β]. $|z - (1 + 2\cdot i)| = 3$

[Γ]. $|z-(2+i)| = 9$ [Δ]. $|z-(2+i)| = 3$ [Ε]. $|z+(2+i)| = 3$

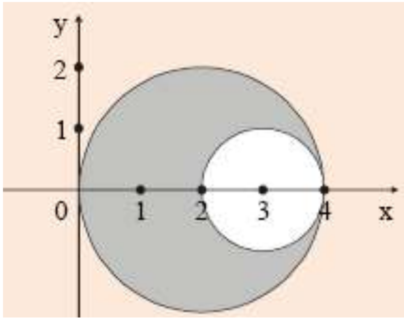
24). Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει

[Α]. $|z+1| < 1$ και $|z+i| < 1$
[Β]. $|z-1| < 1$ και $|z+i| < 1$
[Γ]. $|z-1| > 1$ και $|z-i| > 1$
[Δ]. $|z-1| < 1$ και $|z-i| < 1$
[Ε]. $|z+1| < 1$ και $|z-i| < 1$



25). Οι μιγαδικοί αριθμοί ζ που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει

[Α]. $|z-2| < 2$ και $|z-3| < 1$
[Β]. $|z-2| < 2$ και $|z-3| > 1$
[Γ]. $|z+2| < 2$ και $|z-3| > 1$
[Δ]. $|z+2| < 2$ και $|z+3| > 1$
[Ε]. $|z-2| > 2$ και $|z-3| < 1$



26). Αν η εξίσωση $|z-2| = |z-\kappa\cdot i|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y = x, ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με

[Α]. 1 [Β]. – 1 [Γ]. 2 [Δ]. – 2 [Ε]. 4

27). Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z-z_1| = |z-z_2| = |z-z_3|$ με άγνωστο τον z είναι

[Α]. 2 [Β]. 3 [Γ]. 1 [Δ]. 4 [Ε]. 0

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

1). Αν $z = \alpha + \beta\cdot i$, $\alpha, \beta \in R$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$. Σ Λ

2). Αν $z = \alpha + \beta\cdot i$ και $\alpha\cdot\beta \neq 0$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\cdot i$. Σ Λ

3). Αν $z = \kappa + \lambda\cdot i$, $\kappa, \lambda \in R$, τότε $Re(z) = \kappa$. Σ Λ

4). Αν $z = x + (y-1)\cdot i$ και $Re(z) = 0$, τότε $y = 1$. Σ Λ

5). Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$. Σ Λ

6). Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα y′y. Σ Λ

7). Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2003} = i$. Σ Λ

8). Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x′x. Σ Λ

9). Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζεται $z^0 = 1$. Σ Λ

10). Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x′x είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \overline{z}_2$. Σ Λ

11). Αν $z_1 = \alpha + \beta\cdot i$, $z_2 \in C$, και $z_1 + z_2 = 2\cdot\alpha$, τότε $z_2 = \overline{z}_1$. Σ Λ

12). Αν $Re(z) = 2$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 2$. Σ Λ

13). Αν $Im(z + i) = 8$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $y = 8$. Σ Λ

14). Η εξίσωση $x^2 - 2\cdot x + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$.

15). Αν η εξίσωση $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$

16). Η εξίσωση $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C. Σ Λ

17). Αν $Re(z_1\cdot z_2) = 0$ τότε ισχύει πάντα $Re(z_1)\cdot Re(z_2) = 0$. Σ Λ

18). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |z|$. Σ Λ

19). Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Σ Λ

20). Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

21). Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$, $z_1, z_2 \in C$ έχει μοναδική λύση.

22). Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ

1).. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :
α). $z - \bar{z} = 6\cdot i$ β). $z^2 = \bar{z}^2$ γ). $\bar{z}^2 = -z^2$ δ). $\bar{z} = 2 - z$.

ΛΥΣΗ

Μάθε τους απλούς γεωμετρικούς τόπους κάνοντας μια επανάληψη στις εξισώσεις :
ευθείας, κύκλου, έλλειψης, παραβολής, υπερβολής γιατί θα σου χρειασθούν στη συνέχεια !

α). Αν $z = x + i\cdot y$, τότε $x = 0$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $x = 0$, δηλαδή τα σημεία $M(0, y)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν είναι τα σημεία του άξονα $y'y$.

β). Αν $z = x + i\cdot y$, τότε $y = 0$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = 0$, δηλαδή τα σημεία $M(x, 0)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με φανταστικό μέρος ίσο με το μηδέν είναι τα σημεία του άξονα $x'x$. Είναι $z = x + 0\cdot i$. Άρα, οι εικόνες του είναι τα σημεία $M(x, 0)$, δηλαδή τα σημεία του άξονα $x'x$.

γ). Αν $z = x + i\cdot y$, τότε $x = y$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $y = x$, δηλαδή τα σημεία $M(x, x)$, οπότε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z με πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό είναι τα σημεία της ευθείας που είναι διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

2). Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:
α). $x^2 - 3\cdot x + 2 = 0$ β). $x^2 - 2\cdot x + 3 = 0$ γ). $x + \frac{1}{x} = 1$.

ΛΥΣΗ

Να ξέρουμε ότι τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές τις λύνουμε κατά τον γνωστό τρόπο. Αν αυτή έχει ρίζες μιγαδικές τότε οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικοί.

α). $x^2 - 3\cdot x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \; x = 2 \;\; \eta \;\; x = 1$

β). Έχουμε $\Delta = 4 - 12 = -8$, οπότε :

$$x^2 - 2\cdot x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \; x = 1 + i\sqrt{2} \;\; \eta \;\; x = 1 - i\sqrt{2}$$

γ). Είναι $x \neq 0$ και έχουμε $\Delta = 1 - 4 = -3$:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

3). Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in R$, είναι $3 + 2\cdot i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

ΛΥΣΗ

Να ξέρουμε ότι για τις ρίζες ρ_1, ρ_2 μιας δευτεροβάθμιες εξίσωσης $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, ισχύουν οι τύποι του Vieta : $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Αφού οι συντελεστές της εξίσωσης $2 \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και μία ρίζα της είναι η $3 + 2 \cdot i$, η άλλη θα είναι η $3 - 2 \cdot i$, οπότε θα ισχύει : $x_1 \cdot x_2 = 13$ και $x_1 + x_2 = 6$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{2} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 13 = \dfrac{\gamma}{2} \\ 6 = -\dfrac{\beta}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \gamma = 26 \\ \beta = -12 \end{matrix}\right\}.$$

4). Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^\nu + i^{-\nu}$.

ΛΥΣΗ

Θα διακρίνουμε σε τέτοιες ασκήσεις 4 περιπτώσεις για το φυσικό ν.

$\rightarrow$ 1η περίπτωση να είναι της μορφής $\nu = 4 \cdot \kappa + 0$, οπότε $i^\nu = i^0 = 1$.

$\rightarrow$ 2η περίπτωση να είναι της μορφής $\nu = 4 \cdot \kappa + 1$, οπότε $i^\nu = i^1 = i$.

$\rightarrow$ 3η περίπτωση να είναι της μορφής $\nu = 4 \cdot \kappa + 2$, οπότε $i^\nu = i^2 = -1$.

$\rightarrow$ 4η περίπτωση να είναι της μορφής $\nu = 4 \cdot \kappa + 3$, οπότε $i^\nu = i^3 = -i$.

Έχουμε $A = i^\nu + i^{-\nu} = i^\nu + \dfrac{1}{i^\nu}$. Επομένως:

Αν $\nu = 4 \cdot \kappa$, τότε $i^\nu = 1$, οπότε $A = 1 + 1 = 2$.

Αν $\nu = 4 \cdot \kappa + 1$, τότε $i^\nu = i$, οπότε $A = i + \dfrac{1}{i} = i - i = 0$.

Αν $\nu = 4 \cdot \kappa + 2$, τότε $i^\nu = -1$, οπότε $A = -1 - 1 = -2$.

Αν $\nu = 4 \cdot \kappa + 3$, τότε $i^\nu = -i$, οπότε $A = -i + \dfrac{1}{-i} = -i + i = 0$.

5). Να λύσετε τις εξισώσεις : α). $\bar{z} = z^2$ β). $\bar{z} = z^3$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει να ξέρεις ότι τις απλές εξισώσεις και ανισώσεις τις λύνουμε θέτοντας $z = x + i \cdot y$, οπότε καταλήγουμε σε σύστημα 2 εξισώσεων με δυο αγνώστους τους χ, γ το οποίο αφού το επιλύσουμε βρίσκουμε τα x, y, άρα τον z.

α). Αν $z = x + i \cdot y$ τότε έχουμε :

$\bar{z} = z^2 \Rightarrow x - i \cdot y = (x + i \cdot y)^2 \Rightarrow x - i \cdot y = x^2 + (i \cdot y)^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i \Rightarrow x - i \cdot y = x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2 - x) + (2 \cdot x + 1) \cdot y \cdot i = 0 \quad \left\{\begin{matrix} 2x + 1 \ \ y = 0 \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x + 1 = 0 \ \ \eta \ \ y = 0 \\ x^2 - y^2 - x = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$\rightarrow$ Αν $2 \cdot x + 1 = 0$, δηλαδή αν $x = -\dfrac{1}{2}$, τότε η (2) γράφεται :

$\dfrac{1}{4} - y^2 + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα : $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow$ Αν $y = 0$, τότε η (2) γράφεται : $x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Άρα : $z = 0$ ή $z = 1$.

β). Αν $z = x + i \cdot y$, έχουμε : $\bar{z} = z^3 \Rightarrow x - i \cdot y = (x + i \cdot y)^3 \Rightarrow x - i \cdot y = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y \cdot i + 3 \cdot x \cdot (y \cdot i)^2 + (y \cdot i)^3$
$\Rightarrow x - y \cdot i = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y \cdot i - 3 \cdot x \cdot y^2 - y^3 \cdot i \Rightarrow x - y \cdot i = (x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2) + (3 \cdot x^2 - y^2) \cdot y \cdot i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2 - y^2 \;\; y = -y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \;\; x^2 - 3y^2 - 1 \;\; = 0 \\ y \;\; 3x^2 - y^2 + 1 \;\; = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \quad \eta \quad x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \quad \eta \quad 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{Bmatrix}$$

→ Αν x = 0, τότε η (2) γράφεται : $y(1 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $y = \pm 1$.
Άρα : z = 0 ή z = i ή z = –i.

→ Αν $x^2 = 3 \cdot y^2 + 1$, τότε η (2) γράφεται:
$y \cdot [3(3 \cdot y^2 + 1) - y^2 + 1] \Rightarrow y \cdot (8 \cdot y^2 + 4) = 0 \Rightarrow y = 0$. Άρα $x^2 = 1$, οπότε x = 1 ή x = –1 και επομένως z = 1 ή z = –1.

6). Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$

ΛΥΣΗ
Ας θυμηθούμε ότι αν $z = \bar{z}$ τότε $z \in R$ και αντίστροφα.

$\overline{\left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{\bar{z}}} + \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}}$, οπότε ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός αφού ισούται με τον συζυγή του.

Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{z^2 + \bar{z}^2}{\bar{z} \cdot z} \leq 2$.

Αν $z = x + i \cdot y$, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι : $-2 \leq \frac{x + i \cdot y^{\;2} + \; x - i \cdot y^{\;2}}{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \leq \frac{2\;\; x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 \leq 2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 \leq 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \cdot x^2 \leq 2 \cdot x^2 \leq 2 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 \Leftrightarrow -4 \cdot x^2 \leq 0 \leq 4 \cdot y^2$, που ισχύουν και οι δύο.
Άρα ισχύει και η αρχική διπλή ανισότητα.

7). Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta \cdot i)^{10} + (\beta - \alpha \cdot i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

ΛΥΣΗ
Κάτι πιο δύσκολο! Πρέπει να ξέρεις ότι: $\beta - \alpha \cdot i = -(-1)\beta - \alpha \cdot i = -i^2 \cdot \beta - \alpha \cdot i = -i \cdot (\alpha + \beta \cdot i)$
Είναι $\beta - \alpha \cdot i = -i \cdot (\alpha + \beta \cdot i)$. Επομένως :
$(\alpha + \beta \cdot i)^{10} + (\beta - \alpha \cdot i)^{10} = (\alpha + \beta \cdot i)^{10} + i^{10} \cdot (\alpha + \beta \cdot i)^{10} = (\alpha + \beta \cdot i)^{10} - (\alpha + \beta \cdot i)^{10} = 0$.

8). α). Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι : → Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \bar{z}$. → Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$. β). Αν $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ είναι φανταστικός.

ΛΥΣΗ

α). Έστω z = α + β·i, οπότε $\bar{z}$ = α – β·i.

→ Αν z = $\bar{z}$ ⇔ α + β·i = α – β·i ⇔ 2·β·i = 0 ⇔ β = 0 z ∈ R.

→ Αν z = – $\bar{z}$ ⇔ α + β·i = –(α –β·i) ⇔ α + β·i = –α + β·i ⇔ 2·α = 0 ⇔ α = 0 ⇔ z ∈ I.

β). Αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{u}$ = θ και $\bar{v}$ = – v.

Επειδή $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2}$ θα είναι :

$$\bar{u} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = \frac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}} = \frac{\dfrac{z_2+z_1}{z_1\cdot z_2}}{\dfrac{z_1z_2+1}{z_1\cdot z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2} = u\,.$$

$$\bar{v} = \frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = \frac{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}} = \frac{\dfrac{z_2-z_1}{z_1\cdot z_2}}{\dfrac{z_1z_2+1}{z_1\cdot z_2}} = -\frac{z_1-z_2}{1+z_1\cdot z_2} = v\,.$$

9). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών ζ για τους οποίους ισχύει:

α), $\mathrm{Re}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ = 5·Re(z) β). $\mathrm{Im}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ = –3·Im(z).

ΛΥΣΗ

Να ξέρουμε ότι στους απλούς γεωμετρικούς τόπους θέτουμε z = x + i·y και αναζητούμε τη σχέση (συνήθως σχέση ισότητας) που συνδέει το x με το y.

α). Έστω z = x + i·y. Τότε $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+i\cdot y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Επομένως :

$$\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right) = 5\cdot\mathrm{Re}\ z \Leftrightarrow x+\frac{x}{x^2+y^2} = 5x \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-4\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{x=0\ \ \eta\ \ x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας y′y με εξαίρεση το σημείο Ο(0, 0) ή ο κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = $\dfrac{1}{2}$.

β). Έχουμε : $\mathrm{Im}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = -3\mathrm{Im}\ z \Leftrightarrow y-\dfrac{y}{x^2+y^2} = -3y \Leftrightarrow 4y-\dfrac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y\left(4-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{y=0\ \ \eta\ \ x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας x′x με εξαίρεση το σημείο Ο(0, 0) ή κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = $\dfrac{1}{2}$.

10). Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι:

α). $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2 = 2\cdot\mathrm{Re}\ \ z_1\cdot\overline{z_2}\ \ = 2\cdot\mathrm{Re}\ \ \overline{z_1}\cdot z_2$

β). $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\cdot\mathrm{Re}\ \ z_1\cdot\overline{z_2}\ \ = |z_1|^2+|z_2|^2+2\cdot\mathrm{Re}\ \ \overline{z_1}\cdot z_2$

γ). $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)$

ΛΥΣΗ

Πρόσεξε να μάθεις τις ασκήσεις αυτές γιατί είναι βασικές !

α). Γνωρίζουμε ότι $z + \bar{z} = 2\cdot\mathrm{Re}(z)$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Έχουμε λοιπόν τα εξής :

$z_1\cdot\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot z_2 = z_1\cdot\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot\overline{\overline{z_2}} = z_1\cdot\overline{z_2} + \overline{\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)} = 2\cdot\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$ ή

$z_1\cdot\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot z_2 = \overline{\overline{z_1}}\cdot\overline{z_2} + \overline{z_1}\cdot z_2 = \overline{\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)} + \overline{z_1}\cdot z_2 = 2\cdot\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)$.

β). $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\cdot\overline{z_1} + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\cdot\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$

γ). $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\cdot\overline{z_1} - z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\cdot\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)$.

11). Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$

ΛΥΣΗ

α τρόπος: αλγεβρικός

Έστω $z_1 = x_1 + y_1\cdot i$ και $z_2 = x_2 + y_2\cdot i$. Τότε : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\cdot i$ και $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\cdot i$. Άρα :

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2\cdot(x_1^2 + y_1^2) + 2\cdot(x_2^2 + y_2^2)$
$= 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.

β τρόπος: εφαρμόζουμε την άσκηση 10

Έχουμε : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)$ (1) και

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\cdot\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε :

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.

12). Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι αν $|z| = 1$, τότε ο $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

ΛΥΣΗ

Έχουμε τις ισοδυναμίες : w φανταστικός $\Leftrightarrow \bar{w} = w \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = -\dfrac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z} - 1)\cdot(z + 1) = -(z - 1)\cdot(\bar{z} + 1) \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} + \bar{z} - z - 1 = -z\cdot\bar{z} - z + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

13). Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι : Ο $w = z + \dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε τις ισοδυναμίες : $w \in R \Leftrightarrow w = \overline{w} \Leftrightarrow \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \overline{z}^{2} \cdot z + z = \overline{z} \cdot z^2 + \overline{z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z \cdot \overline{z} \cdot (\overline{z} - z) - (\overline{z} - z) = 0 \Leftrightarrow (z \cdot \overline{z} - 1) \cdot (\overline{z} - z) = 0 \Leftrightarrow \{ z \cdot \overline{z} = 1$ ή $z = \overline{z} \} \Leftrightarrow |z| = 1$ ή $z \in R$.

14). Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha \cdot i$, όπου $\alpha \in R^*$. Να αποδείξετε ότι : ο $w = \frac{z+\alpha \cdot i}{i \cdot z + \alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

ΛΥΣΗ

Έχουμε τις ισοδυναμίες : w φανταστικός $\Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+\alpha \cdot i}{i \cdot z+\alpha}\right)} = -\frac{z+\alpha \cdot i}{i \cdot z+\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-\alpha \cdot i}{-i \cdot \overline{z}+\alpha} = \frac{- \ z+\alpha \cdot i}{i \cdot z+\alpha} \Leftrightarrow i \cdot z \cdot \overline{z} + \alpha \cdot \overline{z} + \alpha \cdot z - \alpha^2 \cdot i = i \cdot z \cdot \overline{z} - \alpha \cdot \overline{z} - \alpha \cdot z - \alpha^{2} \cdot i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \alpha \cdot z = -2 \cdot \alpha \cdot \overline{z} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow$ z φανταστικός.

15). Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας ρ = 1, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{2 \cdot z - i}{i \cdot z + 2}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z = \alpha + \beta \cdot i$, οπότε $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$ (1) και $w = x + i \cdot y$.
Αναζητάμε τη σχέση που συνδέει το x με το y.

Έχουμε : $w = \frac{2 \cdot z - i}{i \cdot z + 2} \Rightarrow x + i \cdot y = \frac{2 \ \alpha + i\beta \ - i}{i \ \alpha + i\beta \ + 2} \Rightarrow x + i \cdot y = \frac{2\alpha + 2i\beta - i}{i \cdot \alpha - i\beta + 2} \Rightarrow$

$x + i \cdot y = \frac{2\alpha + \ 2\beta - 1 \ i}{2 - \beta \ + i \cdot \alpha} = \frac{\left[2\alpha + \ 2\beta - 1 \ i\right]\left[\ 2 - \beta \ - i \cdot \alpha\right]}{\left[\ 2 - \beta \ + i \cdot \alpha\right]\left[\ 2 - \beta \ - i \cdot \alpha\right]} =$

$= \frac{2\alpha \cdot \ 2 - \beta \ + \alpha \ 2\beta - 1}{2 - \beta^{\ 2} + \alpha^2} + i \cdot \frac{-2\alpha^2 + \ 2\beta - 1 \ \ 2 - \beta}{2 - \beta^{\ 2} + \alpha^2} = \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow x + i \cdot y = \frac{3\alpha}{4 - 4\beta + \beta^2 + \alpha^2} + i \frac{-2 \ \alpha^2 + \beta^2 \ + 5\beta - 2}{4 - 4\beta + \beta^2 + \alpha^2}$.

Λόγω της (1) έχουμε ότι : $x + i \cdot y = \frac{3\alpha}{4 - 4\beta + 1} + i \frac{-2 \cdot 1 + 5\beta - 2}{4 - 4\beta + 1} = \frac{3\alpha}{5 - 4\beta} + i \cdot \frac{5\beta - 4}{5 - 4\beta}$.

Άρα $x = \frac{3\alpha}{5 - 4\beta}$ και $y = \frac{5\beta - 4}{5 - 4\beta}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $x^2 + y^2 = 1$. Έχουμε : $x^2 + y^2 = \left(\frac{3\alpha}{5 - 4\beta}\right)^2 + \left(\frac{5\beta - 4}{5 - 4\beta}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3\alpha^{\ 2}}{5 - 4\beta^{\ 2}} + \frac{5\beta - 4^{\ 2}}{5 - 4\beta^{\ 2}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

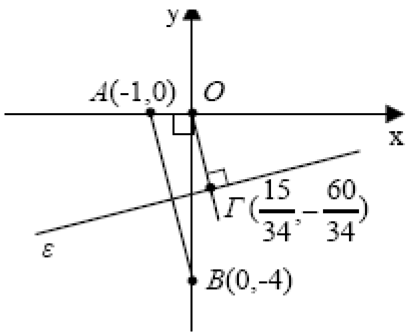
16). Αν για το μιγαδικό z ισχύει $\lvert 2 \cdot z - 1 \rvert = \lvert z - 2 \rvert$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

ΛΥΣΗ
α τρόπος: (μέθοδος του τετραγωνισμού)
Έχουμε : $|2\cdot z - 1| = |z - 2| \Rightarrow |2\cdot z - 1|^2 = |z - 2|^2 \Rightarrow (2\cdot z - 1)\cdot(2\cdot \bar{z} - 1) = (z - 2)\cdot(\bar{z} - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cdot z\cdot \bar{z} - 2\cdot z - 2\cdot z + 1 = z\cdot \bar{z} - 2\cdot z - 2\cdot \bar{z} + 4 \Rightarrow 3\cdot z\cdot \bar{z} = 3 \Rightarrow z\cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$
Άρα, η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β τρόπος : με αντικατάσταση
Αν $z = x + i\cdot y$, έχουμε : $|2\cdot z - 1| = |z - 2| \Rightarrow |2\cdot(x + i\cdot y) - 1| = |x + i\cdot y - 2| \Rightarrow$
$\Rightarrow |(2\cdot x - 1) + 2\cdot y\cdot i| = |(x - 2) + y\cdot i| \Rightarrow 4\cdot(2\cdot x - 1)^2 + (2\cdot y)^2 = 4\cdot(x - 2)^2 + y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1 + 4\cdot y^2 = x^2 - 4\cdot x + 4 + y^2 \Rightarrow 3\cdot x^2 + 3\cdot y^2 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$
Άρα, η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

17). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει : $\lvert z + 1\rvert = \lvert z + 4\cdot i\rvert$. Ποιο από τα σημεία Μ απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή Ο(0, 0).

ΛΥΣΗ
Η σχέση που μας δίνεται $|z + 1| = |z + 4\cdot i|$ μετατρέπεται στην $|z - (-1 + 0\cdot i)| = |z - (0 - 4\cdot i)|$, που ως γνωστόν είναι εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα Α(–1, 0) και Β(0, –4). Επειδή όμως θα χρειασθούμε την εξίσωσή της εργαζόμαστε αλγεβρικά. Αν ζ = χ + γί , τότε θα έχουμε : $|z + 1| = |z + 4\cdot i| \Leftrightarrow |(x + 1) + y\cdot i| =$
$= |x + (y + 4)\cdot i| \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 4)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 4)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2\cdot x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 8\gamma + 16 \Rightarrow 2\cdot x + 1 = 8\cdot y + 16 \Rightarrow$



$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$. Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε) : $y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$.
Ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι αυτός που έχει για εικόνα το ίχνος της καθέτου από την αρχή Ο στην ε. Η κάθετος αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αντιθετοαντίστροφο του συντελεστή διεύθυνσης της (ε) : $y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$, άρα λ = –4,
οπότε έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda\cdot(x - x_0)$ με $x_0 = y_0 = 0$ και λ = –4, άρα $y = -4\cdot x$ και επομένως οι συντεταγμένες του σημείου τομής της με την ε βρίσκεται από τη λύση του συστήματος
$\left\{\begin{array}{l} y = -4x \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8} \end{array}\right\}$, που είναι το ζεύγος $\left(\frac{15}{43}, -\frac{60}{34}\right)$

Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z = \frac{15}{43} - i\frac{60}{34}$ και το ελάχιστο μέτρο είναι το

$|z| = \sqrt{\left(\frac{15}{43}\right)^2 + \left(\frac{60}{34}\right)^2}$

Παρατήρηση : Επειδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ των μιγάδων z είναι ευθεία και επεκτείνεται απεριόριστα, δεν μπορούμε να βρούμε τον μιγάδα με το μεγαλύτερο μέτρο.

18). Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να

αποδείξετε ότι : Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

ΛΥΣΗ

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ και $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$. Επειδή το σημείο M_1 κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4^2$ θα ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = 16$. (1)

Επομένως : $z_2 = z_1 + \dfrac{4}{z_1} \Rightarrow x_2 + y_2 \cdot i = x_1 + y_1 \cdot i + \dfrac{4}{x_1 + y_1 \cdot i} \Rightarrow x_2 + y_2 \cdot i = x_1 + y_1 \cdot i + \dfrac{4\ x_1 - y_1 \cdot i}{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 + y_2 \cdot i = x_1 + y_1 \cdot i + \dfrac{4\ x_1 - y_1 \cdot i}{16}$ (λόγω της (1)) . $x_2 + i \cdot y_2 = x_1 + y_1 \cdot i + \dfrac{x_1}{4} - \dfrac{y_1}{4} \cdot i \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 + y_2 \cdot i = \dfrac{5x_1}{4} + \dfrac{3y_1}{4} \cdot i$. Επομένως, $x_2 = \dfrac{5x_1}{4}$ και $y_2 = \dfrac{3y_1}{4}$, οπότε $x_1 = \dfrac{4x_2}{5}$ και $y_1 = \dfrac{4y_2}{3}$ (2).

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x_1 και y_1 στην (1) και έχουμε :

$$\left(\frac{4x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4y_2}{3}\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{16x_2^2}{25} + \frac{16y_2^2}{9} = 16 \Rightarrow \frac{x_2^2}{25} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

Άρα, το σημείο M_2 κινείται στην έλλειψη με μεγάλο άξονα $2 \cdot \alpha = 10$ και εστίες Ε ′(–4, 0), Ε(4, 0).

19). Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\kappa$ ισχύει $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\kappa| = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_\kappa| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_k}\right|.$$

ΛΥΣΗ

Όταν ένας μιγάδας έχει μέτρο $|z| = \kappa$, με $\kappa > 0$, να ξέρεις ότι :

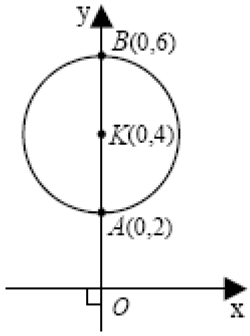
$$|z| = \kappa \Rightarrow |z| = \kappa^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \kappa^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{k^2}{z}.$$

Από τις ισότητες $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \cdots = |z_k| = 1$ έχουμε : $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1},\ \overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2},\ \cdots, \overline{z_k} = \dfrac{1}{z_k}$.

Άρα : $\left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \cdots + \dfrac{1}{z_k}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_k}\right| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_k|$. (αφού $|z| = |\bar{z}|$)

20). Από τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 4 \cdot i| = 2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο ;

ΛΥΣΗ



Από την ισότητα $|z - 4 \cdot i| = 2$ προκύπτει ότι η απόσταση του M(z) από το σημείο K(0, 4) είναι σταθερή και ίση με 2. Επομένως το Μ ανήκει σε κύκλο με κέντρο K(0, 4) και ακτίνα ρ = 2. Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας M(z) από την αρχή O(0, 0), δηλαδή το μήκος OM. Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία 0K τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε (OA) ≤ (OM) ≤ (OB), που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (0A). Ο μιγαδικός λοιπόν με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $\zeta_1 = 2$ί και ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z_2 = 6 \cdot i$.

21). Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2 \cdot z + 1$.

ΛΥΣΗ

Σχόλιο ! Στην άσκηση αυτή έχουμε τον μιγάδα z που ξέρουμε τον γεωμετρικό του τόπο γιατί αφού $|z| = 1$, συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες του z θα βρίσκονται στον κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας $\rho = 1$, και αναζητάμε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w που εκφράζεται συναρτήσει του z. Στις ασκήσεις αυτής της κατηγορίας θα εργαζόμαστε ως εξής : Θέτουμε $z = \alpha + \beta \cdot i$, οπότε $\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow$ (1) και $w = x + i \cdot y$. Αναζητάμε τη σχέση που συνδέει το x με το y. Έχουμε : $w = 2 \cdot z + 1 \Rightarrow x + i \cdot y = 2 \cdot (\alpha + \beta \cdot i) + 1 \Rightarrow x + i \cdot y = (2 \cdot \alpha + 1) + 2 \cdot \beta \cdot i \Rightarrow$
$\Rightarrow \{ x = 2 \cdot \alpha + 1 \quad \text{και} \quad y = 2 \cdot \beta \}$ (2).

Πρόσεξε τώρα ! Αν και ζητάμε την σχέση που συνδέει το x με το y, θα επιλύσουμε το σύστημα ως προς τα α και β και στη συνέχεια αυτά που θα βρούμε θα τα αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) που τα συνδέει, για να βρούμε το ζητούμενο.

Επιλύοντας λοιπόν τις σχέσεις (2) ως προς α και β έχουμε : $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{x-1}{2} \\ \beta = \dfrac{y}{2} \end{array} \right\}$. Αντικαθιστώντας στην συνέχεια στην (1) έχουμε : $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου Κ(1, 0) και ακτίνας $\rho = 1$.

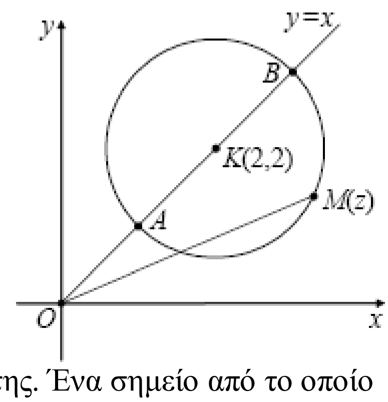
22). Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - (2 + 2 \cdot i)| = \sqrt{2}$ να βρεθεί :

α). Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

β). Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΛΥΣΗ

α). Η ισότητα $|z - (2 + 2 \cdot i)| = \sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο Κ(2, 2) σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(2, 2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ δηλαδή ο κύκλος $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.



β). Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας Μ(z) από την αρχή Ο(0, 0), δηλαδή το μήκος ΟΜ. Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο στα Α και Β, τότε (ΟΑ) ≤ (ΟΜ) ≤ (ΟΒ), που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (ΟΒ) και η ελάχιστη το μήκος (ΟΑ).
Πρέπει λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ΟΚ και να λύσουμε το σύστημα της ευθείας και του κύκλου $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$, για να βρούμε τα κοινά σημεία τους που είναι τα Α, Β.
Η ευθεία ΟΚ θα έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$, όπου (x_0, y_0), ένα σημείο από το οποίο διέρχεται και λ ο συντελεστής διεύθυνσής της. Ένα σημείο από το οποίο διέρχεται είναι το Ο(0, 0), άρα $x_0 = 0$ και $y_0 = 0$. Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι ο $\lambda = \dfrac{y_k - y_0}{x_k - x_0} = \dfrac{2-0}{2-0} = 1$, μιας και διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και Κ(2, 2), οπότε η εξίσωση της ΟΚ είναι : $y - 0 = \lambda \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \lambda \cdot x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις του συστήματος
$\{ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 \text{ και } y = x \}$, που είναι τα ζεύγη (1, 1) και (3, 3). Άρα, η μέγιστη τιμή του

$|z|$ είναι ίση με (OB) = $\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με (OA) = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

23). Αν $|z-8| = |z-2|$, να δείξετε ότι $Re(z) = 5$.

ΛΥΣΗ

Στις ασκήσεις που έχουν μέτρα και θέλουμε να απαλλαγούμε από αυτά, αφού εξασφαλίσουμε ότι και τα δυο μέλη είναι ομόσημα, υψώνουμε στο τετράγωνο (μέθοδος του τετραγωνισμού) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$, για κάθε μέτρο μιγάδα που είναι υψωμένο στο τετράγωνο.

Έχουμε $|z-8| = |z-2|$ και επειδή τα δυο μέλη είναι θετικά, υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε : $|z-8|^2 = |z-2|^2 \Rightarrow (z-8)\cdot(\bar{z}-8) = (z-2)\cdot(\bar{z}-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow z\cdot\bar{z} - 8\cdot z - 8\cdot\bar{z} + 64 = z\cdot\bar{z} - 2\cdot z - 2\cdot\bar{z} + 4 \Rightarrow -6\cdot z - 6\cdot\bar{z} = -60 \Rightarrow z + \bar{z} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot Re(z) = 10 \Rightarrow Re(z) = 5$.

24). Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+4\cdot i| \le 1$, να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z-3|$.

ΛΥΣΗ

Μελέτησε καλά την άσκηση

α τρόπος

Θα εφαρμόσουμε την τριγωνική ιδιότητα : $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

$\rightarrow$ Έχουμε $|z-3| = |z+4\cdot i - 4\cdot i - 3| = |(z+4\cdot i) + (-3-4\cdot i)| = |(-3-4\cdot i) + (z+4\cdot i)|$.

Αν θέσουμε $z_1 = -3-4\cdot i$, $z_2 = z+4\cdot i$ και εφαρμόσουμε το δεύτερο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$, έχουμε :

$|z-3| = |(-3-4\cdot i) + (z+4\cdot i)| \le |-3-4\cdot i| + |z+4\cdot i| \le \sqrt{-3^{\,2} + -4^{\,2}} + |z+4\cdot i|$. (1)

Όμως $|z+4\cdot i| \le 1$, οπότε η (1) γίνεται : $|z-3| \le \sqrt{-3^{\,2} + -4^{\,2}} = 5 + 1 = 6$.

Άρα $|z-3| \le 6$, που σημαίνει ότι το μέγιστο του $|z-3|$ είναι το 6.

$\rightarrow$ Έχουμε $|z-3| = |(-3-4\cdot i) + (z+4\cdot i)|$. Αν θέσουμε $z_1 = -3-4\cdot i$,
$z_2 = z+4\cdot i$ και εφαρμόσουμε το πρώτο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας,
$|z_1+z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ έχουμε :

$|z-3| = |(-3-4\cdot i) + (z+4\cdot i)| \ge ||-3-4\cdot i| - |z+4\cdot i|| \ge \sqrt{-3^{\,2} + -4^{\,2}} - |z+4\cdot i|$ (2)

Όμως $|z+4\cdot i| \le 1$, οπότε η (2) γίνεται : $z - 3 \ge \sqrt{25} - 1 = 4$, $|z-3| \ge 4$, που σημαίνει ότι το ελάχιστο του $|z-3|$ είναι το 4, άρα τελικά : $4 \le |z-3| \le 6$.

Πρόσεξε τον τρόπο που ενισχύουμε τις ανισότητες. Για να μην κάνεις λάθος να βάζεις πάντα σαν z_1 τον μιγάδα που έχει σταθερό μέτρο

β! τρόπος (Γεωμετρικός)

$|z+4\cdot i| \le 1 \Rightarrow |z-(0-4\cdot i)| \le 1$, οπότε αν M(x, y) η εικόνα του $z = x + i\cdot y$ και K(0, −4) η εικόνα του $w = 0 - 4\cdot i$, η σχέση μετατρέπεται στην $(MK) \le 1$, που σημαίνει ότι οι εικόνες M του z βρίσκονται μέσα στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το K και ακτίνας 1. Αναζητάμε το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z-3| = |z-(3+0\cdot i)|$, που γεωμετρικά εκφράζει την απόσταση MA του σημείου

Μ από το σταθερό σημείο Α(3, 0). Το μέγιστο και το ελάχιστο του ΜΑ το βρίσκουμε κατά τα γνωστά, από την τομή της ευθείας ΚΑ με τον κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας ρ = 1.
Άρα πρέπει να βρούμε την εξίσωση της ευθείας ΚΑ και του κύκλου, να λύσουμε το σύστημά τους και να προσδιορίσουμε το ζητούμενο.

Εξίσωση ΚΑ : $y - y_0 = \lambda\cdot(x - x_0)$, όπου $x_0 = 3$ και $y_0 = 0$ και $\lambda = \frac{-4-0}{0-3} = \frac{4}{3}$, άρα

$y - 0 = 3\cdot(x - 3)$ (1), και η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + (y + 4)^2 = 1$ (2).
Οπότε λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε τα ζητούμενα.

25). Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει : $\sqrt{2}\cdot|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + i\cdot y$, τότε : $\sqrt{2}\cdot|z| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2x^2+2y^2}$ και

$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |x| + |y|$. Άρα θέλουμε να δείξουμε ότι :

$\sqrt{x^2+y^2} \geq |x| + |y| \Rightarrow 2\cdot(x^2 + y^2) \geq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 \geq x^2 + y^2 + 2\cdot|x|\cdot|y| \Rightarrow$

$x^2 + y^2 \geq 2\cdot|x|\cdot|y| \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\cdot|x|\cdot|y| \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2\cdot|x\cdot y| \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0$, που ισχύει.