ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Σύνολο μιγαδικών C = { z = α + β·i, με α, β $\in$ R , $i^2 = -1$ }
Το i ονομάζεται φανταστική μονάδα και ισχύει $i^2 = -1$.

Δυνάμεις του i : $i^\nu = i^{4\cdot\kappa+\upsilon} = i^{4\cdot\kappa}\cdot i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \nu = 4\kappa \\ i, & \alpha\nu\ \nu = 4\cdot\kappa+1 \\ -1, & \alpha\nu\ \nu = 4\cdot\kappa+2 \\ -i, & \alpha\nu\ \nu = 4\cdot\kappa+3 \end{cases}$.

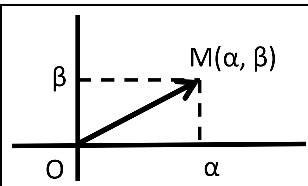
Πραγματικό μέρος του μιγαδικού z = α + β·i, ονομάζεται το α = Re(z).
Φανταστικό μέρος του μιγαδικού z = α + β·i, ονομάζεται το β = Re(z)
Αν z = α + β·i, ονομάζουμε και συμβολίζουμε συζυγή του z τον $\bar{z}$ = α + ·β·i.
Ισχύουν τα παρακάτω :

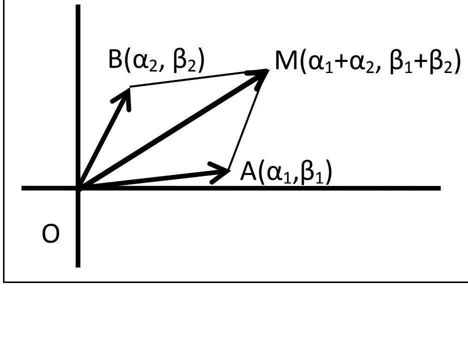
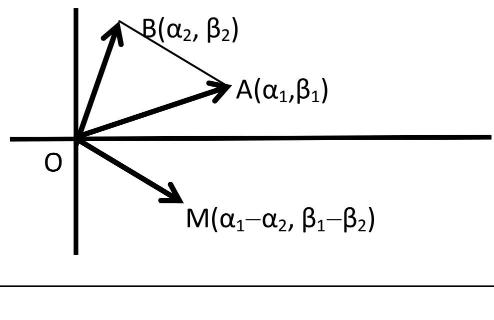
$z+\bar{z} = 2\alpha = 2\cdot \mathrm{Re}\ z$	Αν z_1 = α + β·i και z_2 = γ + δ·i. Τότε :
$z-\bar{z} = 2\cdot i\cdot\alpha = 2\cdot i\cdot \mathrm{Re}\ z$	$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$ και $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$
$z\cdot\bar{z} = \alpha^2+\beta^2 = (\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2$	Γενικά : $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu$
α = Re(z) = $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, β = Im(z) = $\dfrac{z-\bar{z}}{2\cdot i}$	$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ και $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
Αν $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in$ R	Γενικά : $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_\nu} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\cdots\cdot\bar{z}_\nu$
Αν $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in$ I	$\overline{z^\nu} = \bar{z}^\nu$

Αν z_1 = α + β·i και z_2 = γ + δ·i. Τότε :
$z_1 + z_2$ = (α + γ) + (β + δ)·i και $z_1 - z_2$ = (α – γ) + (β – δ)·i.
$z_1\cdot z_2$ = (α·γ – β·δ) + (β·γ+ α·δ)·i

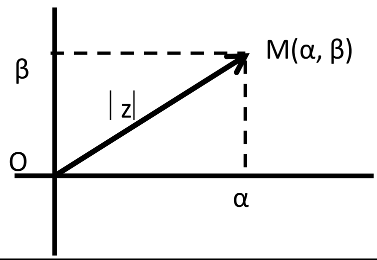
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha+\beta\cdot i}{\gamma+\delta\cdot i} = \frac{(\alpha+\beta\cdot i)(\gamma-\delta\cdot i)}{(\gamma+\delta\cdot i)(\gamma-\delta\cdot i)} = \frac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cdot i$$

$z_1 = z_2 \Rightarrow$ { α = γ και β = δ }   και $z_1 = 0 \Rightarrow$ { α = 0 και β = 0 }

Γεωμετρικά ο z = α + β·i, παριστάνει το σημείο Α(α, β) που το αποκαλούμε εικόνα του μιγαδικού z και συμβολίζεται Μ(z) ή την διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z, που εκφράζεται με το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA}$ = (α, β).	

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών, ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.	Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών, ισούται με την διαφορά των διανυσματικών τους ακτίνων.
	

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\cdot\beta$, ονομάζεται η απόσταση της εικόνας Μ(α, β) του μιγαδικού από την αρχή Ο του μιγαδικού επιπέδου. Αν $z = \alpha + i\cdot\beta$ Τότε $\lvert z \rvert = \lvert \alpha + i\cdot\beta \rvert = OM = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.	

Ιδιότητες : α). $\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert = \lvert -z \rvert = \lvert -\bar{z} \rvert$, β). $\lvert z^2 \rvert = \lvert z \rvert^2 = z\cdot\bar{z}$.

γ). $\lvert z_1\cdot z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert$ δ). $= \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

ε). $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$. στ). $\lvert z^2 \rvert = \lvert z \rvert^2$.

ζ). $\lvert z \rvert = 1 \Rightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$ η). $\lvert z^\nu \rvert = \lvert z \rvert^\nu$.

θ). $\lvert \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert \rvert \leq \lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$. (Τριγωνική ανισότητα)

i). $(AB) = \lvert z_1 - z_2 \rvert$ (Απόσταση δυο μιγαδικών).

Προσοχή επειδή υπάρχει μεγάλη ομοιότητα στις ιδιότητες του μέτρου των μιγαδικών αριθμών και των απόλυτων να θυμάστε πάντα ότι οι παρακάτω ιδιότητες δεν ισχύουν στους μιγαδικούς:

$|x = |y| \Rightarrow x = \pm y$. $-|x| \leq x \leq |x|$.

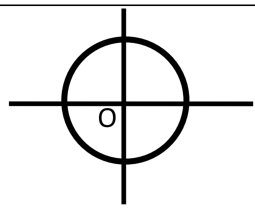
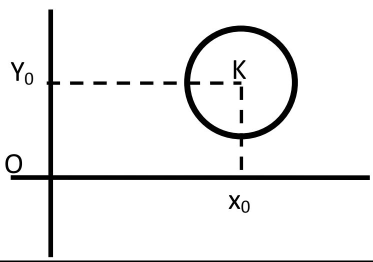
$|x| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$. $|x|^2 = x\cdot x$

$|x| = \sqrt{x^2}$ Πολύ προσοχή ισχύει $\lvert z \rvert = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Παρατήρηση: Για μιγαδικό αριθμό $z = x + i\cdot y$ με εικόνα Μ(x, y) $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$

Η γεωμετρική εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + i\cdot y$ μπορεί να θεωρηθεί και το διάνυσμα θέσης : $\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$ του σημείου Μ(x, y).

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Αν $z = x + y\cdot i$, και $\rho > 0$, και ισχύει $\lvert z \rvert = \rho$, τότε ο μιγαδικός αριθμός κινείται σε κύκλο με κέντρο $O(z) = O(0, 0)$ και ακτίνα ρ. Δηλαδή : $\lvert z \rvert = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$.	
Αν $z = x + y\cdot i$, και $z_0 = x + y\cdot i$, και $\rho > 0$, και ισχύει $\lvert z - z_0 \rvert = \rho$, τότε ο μιγαδικός αριθμός κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(z) = K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Δηλαδή : $\lvert z - z_0 \rvert = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.	
Αν z , z_1 , z_2 μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες M(z), $A(z_1)$, $B(z_2)$ και ισχύει $\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$, τότε η εικόνα του μιγαδικού z κινείτε σε ευθεία που είναι μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.	