ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ / ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ – ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη – 1991)

Αν $w = \frac{z+\alpha\cdot i}{i\cdot z+\alpha}$, με $\alpha \in R^*$ και $z \neq i\cdot\alpha$, τότε να αποδειχθεί ότι:

i). Ο w είναι φανταστικός αριθμός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

ii). Ισχύει $|w| = 1$, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη – 1993)

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-1)\cdot(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, με $z \in C$ και $Re(z) \neq 0$.

i). Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.

ii). Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x, y), για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha\cdot x + \beta\cdot y\cdot i$, με $\alpha, \beta, x, y \in R$ και $\alpha\cdot\beta\cdot x \neq 0$, ικανοποιούν τη σχέση $Re[f(z)] = 0$.

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη – 1994)

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων
$(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$ και $z^{16} + 2\cdot z^{14} + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη -1994)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - i\cdot z$ και
$w_1 = \frac{1}{\alpha} + i\cdot\alpha$, $\alpha \in R^*$.

Να δείξετε ότι, αν το α μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $w = \overline{w_1}$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε μία υπερβολή.

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη -1999)

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$. Να αποδείξετε ότι, στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x, y) που είναι τέτοια ώστε $|z - 1|^2 + |z - 3 - 2\cdot i|^2 = 6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

ΘΕΜΑ (Θετική Κατεύθυνση Επαναληπτικές - 2000)

Αν z_1, z_2, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2\cdot z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι: $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

ΘΕΜΑ (1η Δέσμη - 2001)

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(z) = z^2 - 2\cdot z + 2$ και $Q(z) = z^3 + \alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z - 2$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

i). Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του P(z) και να αποδείξετε ότι $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$.

ii). Αν μία ρίζα του πολυώνυμου P(z) είναι και ρίζα του πολυώνυμου Q(z), να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β.

ΘΕΜΑ (ΟΕΦΕ-2001)

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \frac{2+i\cdot\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z \neq 1$.

i). Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού f(2).

ii).Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = |z|$

iii).Αν $|z| = 1$ και M είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε ευθεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας.

ΘΕΜΑ (Τεχνολογική Κατεύθυνση - 2000)

i). Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3\cdot i}$. Να γράψετε τον z στη μορφή α + i·β, με $\alpha, \beta \in R$.

ii). Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο. Επαναληπτικές - 2001)

i). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \kappa + 15\cdot i$ και $z_2 = 5 + \lambda\cdot i$, όπου $\kappa, \lambda \in R$.
Να βρείτε τις τιμές των κ και λ, ώστε να ισχύει $z_1 = 5\cdot z_2$.

ii).Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, ώστε να ισχύει $z\cdot\bar{z} + (z-\bar{z}) = 5 + 2\cdot i$. .

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού - 2001)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, τέτοιοι ώστε $w = \frac{z-3\cdot i}{1+i}$.

i). α). Αν $w = 2 - 2\cdot i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι:

[Α]. 3 [Β]. 4 [Γ]. 5 [Δ]. 2

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

β). Αν $|w| = 2\cdot\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο. Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

ii). Αν $z = x + i\cdot y$ με $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι:

$Re(w) = \frac{x+y-3}{2}$, $Im(w) = \frac{-x+y-3}{2}$.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού - 2002)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 2\cdot i$ και $z_2 = 3 + 4\cdot i$.

i). Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + i\cdot y$, όπου $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

ii).Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta\cdot x + 2\cdot\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in R$ είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

iii).Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - 2\cdot z_1| = |z_2|$.

ΘΕΜΑ (θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση - 2003)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z = α + i·β, όπου α, β ∈ R,και w = 3·z – i·$\bar{z}$ + 4, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

i). Να αποδείξετε ότι Re(w) = 3·α – β + 4 και Im(w) = 3·β – α.

ii).Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x –12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2 .

iii).Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο – 2003)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z = x + i·y, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και w = $\frac{i\cdot\ i+z}{i-z}$, με z ≠ i,

Να αποδείξετε ότι:

i). w = $\frac{2x}{x^2+\ y-1^{\ 2}}+\frac{1-x^2-y^2}{x^2+\ y-1^{\ 2}}\cdot i$

ii).Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας ρ_1 = 1.

iii).Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας ρ_2 = 1.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού - 2003)

Δίνεται η συνάρτηση f με f(z) = $\frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με z ≠ 0.

i). Αν |f(z)| = |f($\bar{z}$)|, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ii).Αν |f(z)| = 1, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

iii).Αν Re(f(z)) = 2, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο. Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση Επαναληπτικές – 2003)

i). Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις |z| = 2 και Im(z) ≥ 0.

ii). Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w = $\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x′x.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο – 2004)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z = x + i·y, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει α ∈ R ώστε να ισχύει $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2\cdot i}\right)^2\cdot i=\alpha+i\cdot\ 1-\alpha$

Να αποδείξετε ότι:

ϊ). Αν Im(z) = 0,τότε α = 1.

ii). Αν α = 0, τότε z^2 + 1 = 0.

iii).Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει 0 ≤ α ≤ 1.

iv). Οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο. Επαναληπτικές – 2004)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + i\cdot y$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε να ισχύει: $x = 3 - \kappa$ και $y = 2\cdot\kappa + 1$. Να αποδείξετε ότι:

i). Αν $3\cdot Re(z) + 4\cdot Im(z) = 3$, τότε $\kappa = -2$.

ii). Αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

iii).Οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία.
Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού – 2004)

Έστω z μιγαδικός αριθμός με $z \neq \pm 1$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

i). Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

ii). Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

iii). Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \dfrac{z_1 \cdot z_2{}^3 - i}{4 + z_1 + z_2{}^2}$

ΘΕΜΑ (θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2005)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

i). Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$.

ii).Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

iii).Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}\cdot|z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_1\cdot z_3|$.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο –2005)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\cdot\lambda)\cdot i$, $\lambda \in R$ και $w = \kappa + 4\cdot i$, $\kappa > 0$.

Για τους z, w ισχύουν: $Re(z) + Im(z) = 0$ και $|w| = 5$.

i). Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$.

ii). Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

iii).Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in R$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\cdot\bar{z} = 3\cdot i - w$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. Επαναληπτικές – 2005)

i). Αν $z_1\cdot z_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4\cdot i$, και $2\cdot z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5\cdot i$,
να βρείτε τους z_1, z_2.

ii).Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν: $|z - 1 - 3\cdot i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$, τότε:

α). Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι ώστε z = w.

β). Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο. Επαναληπτικές – 2005)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{x+3\cdot i}{2-i}$, $x \in R$.

i). Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

ii). Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός .

iii).Αν $x = 4$ να βρείτε το $|\bar{z}|$.

ΘΕΜΑ (ΟΕΦΕ – 2006)

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \dfrac{z+i}{1+i\cdot z}$, όπου $z \neq i$.

α). Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{w-i}{w+i}\right| = |z|$

β). Αν $|z| = 1$ και Μ η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο , να αποδείξτε ότι το σημείο Μ ανήκει στον άξονα x′x.

γ). Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow$ z φανταστικός.

δ). Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο [α, β] με f(α) > 1 και έστω $z = f(\alpha)\cdot I$ και $w = f(\beta)\cdot i$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β).

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2006)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

i). Να αποδείξετε ότι:

α). $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

β). $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $Re(z_1\cdot \bar{z}_2) \geq -1$.

ii). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού – 2007)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

α). Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

β). Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i). Re(z) = Im(z).

ii). για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2007)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+i\cdot\alpha}{\alpha+2\cdot i}$, με $\alpha \in R$.

α). Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ =1.

β). Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2+i\cdot\alpha}{\alpha+2\cdot i}$, για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i). Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ii).Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\cdot\nu} = (-z_2)^{\nu}$, για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. Επαναληπτικές – 2007)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = α + β\cdot i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου $α, β \in R$ με $β \neq 0$.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in R$.
α). Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.
β). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.
γ). Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $α\cdot β > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι
$(z_1 +1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$.

ΘΕΜΑ (ΟΕΦΕ 2007)
Δίδονται οι μιγαδικοί z, w με $z\cdot w \neq 0$, για τους οποίους ισχύει : $|z + w| = |z - w|$. Να αποδείξετε
α). $Re(z\cdot \overline{w}) = 0$.
β). Ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός.
γ). Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z , w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή Ο των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο Ο.
δ). Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με $0 < α < β$, και $z = α + i\cdot f(α)$, $w = f(β) - i\cdot β$ τότε η εξίσωση $x\cdot f'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β).

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο – 2008)
Δίνεται η εξίσωση $3\cdot z^2 + λ\cdot z + μ = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.
Α). Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $λ = -6$, $μ = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.
Β). Να αποδείξετε ότι :
α). $z_1^2 + z_2^2 = 0$. β). $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. Επαναληπτικές – 2008)
Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + β\cdot z + γ = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.
α). Να αποδείξετε ότι $β = -1$ και $γ = 1$.
β). Να αποδείξετε ότι $z^3 = -1$.
γ). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει :
$|w| = |z_1 - \overline{z}_1|$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2008)
Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν : $|(i + 2\cdot\sqrt{2})\cdot z)| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3\cdot i)|$.
Τότε να βρείτε :
α). Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
β). Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
γ). Την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
δ). Την ελάχιστη τιμή του $|w - z|$.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού – 2008)

Α). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k + 1)\cdot i$, $k \in R$.

α). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$.

β). Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z| = 1$;

Β). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\cdot\beta - (1 + i)^4\cdot\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού – 2009)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{i\cdot\ i-3}{2}$.

α). Να αποδείξετε ότι : $-\bar{z} = -1 + i$, $z^2 = 2\cdot I$, $z^3 = -2 + 2\cdot i$.

β). Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}$, z^2, z^3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ). Να αποδείξετε ότι : $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. Επαναληπτικές – 2009)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : $(2 - i)\cdot z + (2 + i)\cdot z - 8 = 0$.

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + i\cdot y$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β). Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ). Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2009)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς : $z = (2\cdot\lambda + 1) + (2\cdot\lambda - 1)\cdot i$, $\lambda \in R$.

Α). α). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

β). Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β). Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$, όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο ΕΠΑΛ Β – 2009)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 + 3\cdot i$ και $z_2 = (1 - i)^2 + 3\cdot i^{2009} + 1$.

α). Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

β). Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1 - z_2$.

γ). Να εκφράσετε το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\kappa + \lambda\cdot i$, όπου $\kappa, \lambda \in R$.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο ΕΠΑΛ Β – 2010)

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + y\cdot i$, με $x, y \in R$.

Β1). Αν ισχύει ότι $2\cdot z - i\cdot z = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Β2). Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι : $|w + z| = |z|^2$.

Β3). Αν z = 2 + i και u = $\dfrac{\bar{z}+i\cdot z}{\bar{z}-1}$, τότε να αποδείξετε ότι : $u^{2010} = -1$.

ΘΕΜΑ (ΟΕΦΕ 2009)

Δίδεται η εξίσωση $z+\dfrac{1}{z}=-1$, z ∈ C και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι :

Α). $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$. Β). $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in R$. Γ). $z_1^8 + \dfrac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$.

Δ). Αν f(x) συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [0, 1] με f(0) – 2 = $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ και f(1) = $\dfrac{1}{2\cdot z_1}+\dfrac{1}{2\cdot z_2}-\dfrac{3}{2}$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_0) = 3\cdot x_0 - 2$.

Ε). Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού w = $2\cdot z_1 + 2\cdot z_2$ και Α, Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2010)

Δίνεται η εξίσωση z + $\dfrac{2}{z}$ = 2, όπου z ∈ C με z ≠ 0.

Β1). Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Β2). Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$.

Β3). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3\cdot i| = |z_1 - z_2|$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4). Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3 \le |w| \le 7$.

ΘΕΜΑ (ΟΕΦΕ – 2010)

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με την σχέση z = $\dfrac{1+2\cdot w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο Κ(–1, 0) και ακτίνα ρ = 1.

α). Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

β). Αν $|z| = 1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι :

i). Ο αριθμός α = $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}+\dfrac{z_2+z_3}{z_1}+\dfrac{z_3+z_1}{z_2}$, είναι πραγματικός.

ii). Αν επιπλέον $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

γ). Δίδεται η ευθεία (ε) : 3·x + 4·y – 12 = 0. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ (Εισαγωγικές Εξετάσεις Τέκνων Ελλήνων του Εξωτερικού – 2010)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z| = |z - 2\cdot i|$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση y = 1.

Β2).Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$.

Β3). Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$, οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. Επαναληπτικές – 2010)
Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$.
B1). Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2.
B2). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x + 1)^2 + y^2 = 4$.
B3). Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B2 να βρείτε εκείνους για τους οποίους Ισχύει $2 \cdot \text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0$.
B4). Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος B2 με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$.

ΘΕΜΑ (Εσπερινό Ενιαίο Λύκειο ΕΠΑΛ Β επαναληπτικές – 2010)
Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6 \cdot z + \gamma = 0$, με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $\text{Im}(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$.
Γ1). Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$.
Γ2).Αν $\gamma = 25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.
Γ3). Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.
Γ4). Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(z_1 - 2 - 3 \cdot i)^8 + (z_2 - 4 + 5 \cdot i)^8$.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2011)
Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις :
$|z - i| = 1 + \text{Im}(z)$ (1) $w(\overline{w} + 3 \cdot i) = i \cdot (3 \cdot \overline{w} + i)$ (2)
B1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$.
B2). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο K(0, 3) και ακτίνα $\rho = 2 \cdot \sqrt{2}$.
B3). Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.
B4). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ. έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ (Επαναληπτικά Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2011)
Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις :
$|z - i| = 1 + \text{Im}(z)$ (1) $w(\overline{w} + 3 \cdot i) = i \cdot (3 \cdot \overline{w} + i)$ (2)
B1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$.
B2). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο K(0, 3) και ακτίνα $\rho = 2 \cdot \sqrt{2}$.
B3). Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.
B4). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ. έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K,A,Λ,B να είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ (ομογενών Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2011)

Έστω w = z + $\frac{z}{4}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

B1). Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει w = 2.

B2). Αν $z_1 = 1 + i\cdot\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 - i\cdot\sqrt{3}$, είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B1, τότε να αποδείξετε ότι : $z_1^3 + z_2^3 = -8$.

B3). Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

B4). Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2012)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις :

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1)

$|w - 5\cdot\overline{w}| = 12$ (2)

B1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1.

B2). Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

B3). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη, με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

B4). Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$.

ΘΕΜΑ (Επαναληπτικά Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2012)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός w = $\frac{z-1}{z+1}$, είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι :

B1). $|z| = 1$.

B2). Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

B3). $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\cdot(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z.

B4). Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - u\cdot i = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ (ομογενών Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2012)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|i\cdot z - 1| = 1$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ $(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2). Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z| \le 2$.

Β3). Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου $K(0, -1)$, είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ (Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2013)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. (μονάδες 5)
Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$. (μονάδες 3)
Μονάδες 8

Β2). Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta\cdot w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$, και $|Imz_1 - Imz_2| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι: $\beta = -4$ και $\gamma = 5$ Μονάδες 9

Β3). Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση :
$\nu^3 + \alpha_2\cdot\nu^2 + \alpha_1\cdot\nu + \alpha_0 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι : $|\nu| < 4$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ (Επαναληπτικά Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση – 2013)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση
$2\cdot x^2 - |w - 4 - 3\cdot i|\cdot x = -2\cdot|z|$, $x \in R$, έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4, 3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.
Μονάδες 8

Β2). Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. Μονάδες 5

Β3). Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι :
$|z - w| \le 10$ και $|z + w| \le 10$. Μονάδες 6

Β4). Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει : $|2\cdot z^2 - 3\cdot z - 2\cdot z\cdot \bar{z}| = 5$. Μονάδες 6