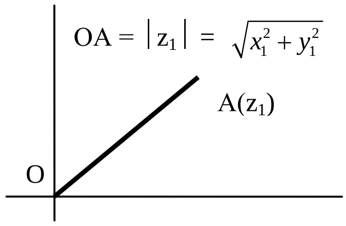
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ − ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ $A(x_1, y_1)$ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ $O(0, 0)$ των αξόνων: $(OA) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Αν έχουμε τον μιγαδικό αριθμό $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Α. Η απόσταση της εικόνας του μιγαδικού από την αρχή Ο, ονομάζεται μέτρο και συμβολίζεται με

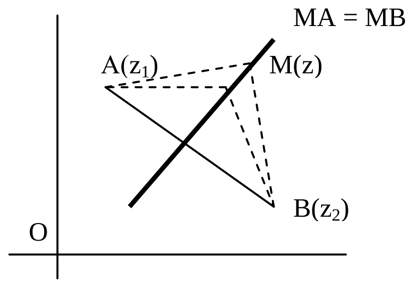
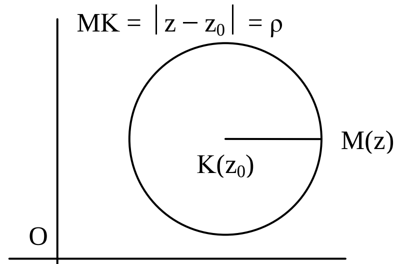
$$|z_1| = (OA) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Αν $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α, Β.

$(AB) = |z_1 - z_1| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	ΣΧΗΜΑ
Σε ένα επίπεδο. Μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα Α, Β του τμήματος. Δηλαδή, για τα σημεία Μ έχουμε (ΜΑ) = (ΜΒ)	$z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$ (ΜΑ) = (ΜΒ) ή $\lvert z - z_2 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$ Το Μ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ.	
Κύκλος ονομάζεται το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από σταθερό σημείο Κ. Το σταθερό σημείο Κ ονομάζεται κέντρο του κύκλου και η απόσταση ρ των σημείων Μ από το Κ ονομάζεται ακτίνα του κύκλου	Αν $K(x_0, y_0)$ η εικόνα του σταθερού σημείου του μιγαδικού $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο του κύκλου με $z = x + i \cdot y$, τότε (ΜΚ) = ρ Δηλαδή $\lvert z - z_0 \rvert = \rho$ ή $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$	 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ $K(x_0, y_0)$, $M(x, y)$

Παραδείγματα

1). Η εξίσωση $|z - 2 - i| = |z - i|$, παριστάνει την μεσοκάθετη ευθεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα τα σημεία Α(2, 1) και Β(0, 1)

2). Η εξίσωση $|z - 2| = |z + 2 \cdot i|$, παριστάνει την μεσοκάθετη ευθεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα τα σημεία Α(2, 0) και Β(0, − 2)

3). Η εξίσωση $|z - 2| = 3$, παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(0, 2) και ακτίνα ρ = 3

4). Η εξίσωση $|z + 2 - 3i| = 2$, παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−2, 3) και ακτίνα ρ = 2

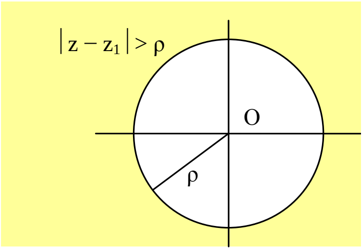
5). Η εξίσωση $|z + 5 \cdot i| = 1$, παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(0, −5) και ακτίνα ρ = 1

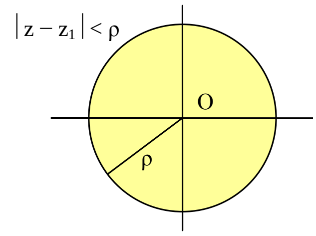
Παρατήρηση

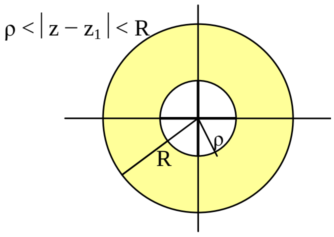
→ Η ανίσωση $|z-z_1| > \rho \Leftrightarrow (MM_1) > \rho \Leftrightarrow$ (τα σημεία Μ(x, y) βρίσκονται εκτός του κύκλου)

→ Η ανίσωση $|z-z_1| < \rho \Leftrightarrow (MM_1) < \rho \Leftrightarrow$ (τα σημεία Μ(x, y) βρίσκονται εντός του κύκλου)

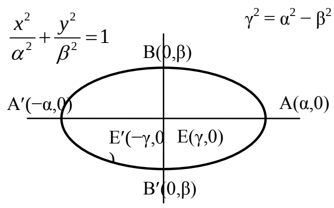
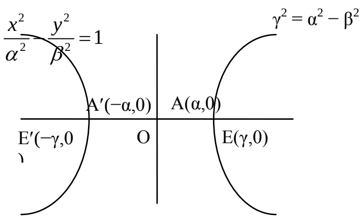
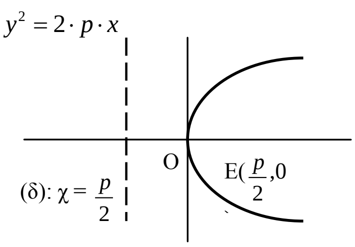
→ Η ανίσωση $\rho \le |z-z_1| < R \Leftrightarrow \rho \le (MM_1) < R \Leftrightarrow$ (τα σημεία Μ(x, y) βρίσκονται εντός του δακτυλίου που ορίζουν οι κύκλοι $|z-z_1| = \rho$ και $|z-z_1| = R$)







ΑΛΛΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ)

ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	ΣΧΗΜΑ
Έλλειψη ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό. Τα δύο σταθερά σημεία ονομάζονται Εστίες τα Έλλειψης.	Αν Μ(x, y) είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, Ε(γ, 0) , Ε′(−γ, 0) οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = \gamma + i\cdot 0$ και $z_2 = -\gamma + i\cdot 0$ αντίστοιχα τότε ισχύει $MA + MB = 2\cdot\alpha \Rightarrow$ $|z-z_1| + |z-z_2| = 2\cdot\alpha$. (εξίσωση της έλλειψης στο Μιγαδικό επίπεδο)	Έλλειψη 
Υπερβολή ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό. Τα δύο σταθερά σημεία ονομάζονται Εστίες της Υπερβολής.	Αν Μ(x, y) είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, Ε(γ, 0) , Ε′(−γ, 0) οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = \gamma + i\cdot 0$ και $z_2 = -\gamma + i\cdot 0$ αντίστοιχα τότε ισχύει $MA - MB = 2\cdot\alpha \Rightarrow$ $|z-z_1| - |z-z_2| = 2\cdot\alpha$. (εξίσωση της έλλειψης στο Μιγαδικό επίπεδο)	Υπερβολή 
Παραβολή ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από σταθερή (δ) και από σταθερό σημείο Ε. Η σταθερή ευθεία ονομάζεται διευθετούσα και το σταθερό σημείο Εστία της παραβολής.	Αν Μ(x, y) είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, και $E(\frac{p}{2}, 0)$, (δ): $x = -\frac{p}{2}$ Όπου Ε η εικόνα του μιγαδικού $z_1 = \frac{p}{2} + i\cdot 0$ και τότε ισχύει ΜΑ = d(M, E) $|z-z_1| = \left\|x+\frac{p}{2}\right\|$. (εξίσωση της παραβολής στο Μιγαδικό επίπεδο)	Παραβολή 

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει η σχέση ΜΑ + ΜΒ = 10, όπου Α και Β οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3$ και $z_2 = -3$

Απάντηση

$$MA + MB = 10 \Rightarrow |z - z_1| + |z - z_2| = 10 \Rightarrow |x + i\cdot y - 3| + |x + i\cdot y + 3| = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x-3) + i\cdot y| + |(x+3) + i\cdot y| = 10 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6\cdot x + 9 + y^2 = 100 + \left(x^2 + 6\cdot x + 9 + y^2\right) - 20\cdot\sqrt{x^2 + 6\cdot x + 9 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot\sqrt{x^2 + 6\cdot x + 9 + y^2} = 100 + 12\cdot x \Rightarrow 5\cdot\sqrt{x^2 + 6\cdot x + 9 + y^2} = 25 + 3\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\cdot\left(x^2 + 6\cdot x + 9 + y^2\right) = \left(25 + 3\cdot x\right)^2 \Rightarrow 16\cdot x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$, έλλειψη με $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει η σχέση ΜΑ − ΜΒ = 8, όπου Α και Β οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 5$ και $z_2 = -5$

Απάντηση

Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο, όπως το προηγούμενο παράδειγμα και έχουμε :

$$MA - MB = 8 \Rightarrow |z - z_1| - |z - z_2| = 8 \Rightarrow |x + i\cdot y - 5| - |x + i\cdot y + 5| = 8 \Rightarrow \cdots$$

Και μετά από πράξεις καταλήγουμε $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, υπερβολή με $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

Σχόλιο

Τα δύο παραπάνω παραδείγματα μπορούν να διατυπωθούν και αντίστροφα

Να βρεθεί ο Γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (α). $|z - 3| + |z + 3| = 10$ και (β). $|z - 5| + |z + 5| = 8$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x, y)$ του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$, αν ισχύει η μιγαδική σχέση $|z - 2| = |Re(z) + 2|$.

Απάντηση

$$|z - 2| = |Re(z) + 2| \Rightarrow |z - 2| = |x + 2| \Rightarrow |z - 2|^2 = |x + 2|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 4\cdot x + 4 + y^2 = x^2 + 4\cdot x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot x + y^2 = 4\cdot x \Rightarrow y^2 = 8\cdot x$$, παραβολή με παράμετρο $p = 2$.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x, y)$ του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$, αν ισχύει

$$\frac{1}{2}\cdot Re\left(z^2 + \bar{z}^2\right) = Im(z) + 1 \quad (1)$$

Απάντηση

Με πράξεις εύκολα διαπιστώνουμε ότι $z^2 + \bar{z}^2 = 2\cdot(x^2 - y^2)$. Οπότε η σχέση (1) γράφεται :

$$\frac{1}{2}\cdot Re\left(z^2 + \bar{z}^2\right) = Im(z) + 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = y + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 + 2\cdot y + 1 \Rightarrow x^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x = \pm(y + 1)$$

δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ένα ζεύγος κάθετων ευθειών.

Παράδειγμα 5
Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων Μ(x, y) του μιγαδικού z = x + i·y, x, y $\in$ R, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων τις εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 6 + i\cdot 0$ και $z_2 = -3 + i\cdot 0$ είναι ίσος με το 2. (Απολλώνιος Κύκλος)
Απάντηση

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow MA = 2\cdot MB \Rightarrow |z - z_1| = 2\cdot|z - z_2| \Rightarrow |z - 6| = 2\cdot|z + 3| \Rightarrow |z - 6|^2 = 4\cdot|z + 3|^2$$

$$\Rightarrow (z-6)\cdot(\bar{z}-6) = 4\cdot(z+3)\cdot(\bar{z}+3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x + 6)^2 + y^2 = 36.$$ καταλήγουμε σε κύκλο με κέντρο Κ(−6, 0) και ακτίνα ρ = 6.

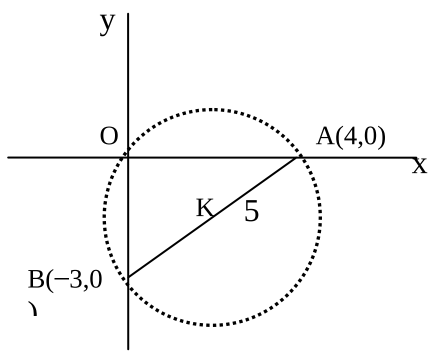
Παράδειγμα 6
Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των εικόνων Μ(x, y) του μιγαδικού z = x + i·y, x, y $\in$ R, για τα οποία ισχύει $|z - 4|^2 + |z + 3|^2 = 25$. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος.
Απάντηση

$$|z-4|^2 + |z+3|^2 = 25 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y+3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 8\cdot x + 16 + y^2 + x^2 + y^2 + 6\cdot y + 9 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 - 8\cdot x + 6\cdot y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4\cdot x + 3\cdot y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

$|z - 4|^2 + |z + 3|^2 = 25 \Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2$
Η σχέση μας θυμίζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, Επειδή το σημείο Μ είναι μεταβλητό, βλέπει την υποτείνουσα ΑΒ υπό ορθή γωνία. Άρα περιγράφει κύκλο με διάμετρο την ΑΒ και το κέντρο αυτού του κύκλου είναι το μέσον της ΑΒ, δηλαδή το σημείο $K\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ και η ακτίνα του κύκλου είναι το μισό του ΑΒ, $\rho = \frac{5}{2}$.



ΑΣΚΗΣΗ 1
Αν η εικόνα του μιγαδικού z = x + i·y , x, y $\in$ R, κινείται στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού w με $w = \frac{z+i}{z-i}$, όπου $z \neq i$.
Υπόδειξη
Ισχύει ότι $|z| = 1$. ο μιγαδικός $w = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow w\cdot(z - i) = z + i \Rightarrow w\cdot z - z = i + i\cdot w \Rightarrow$

$$\Rightarrow z\cdot(w - 1) = i\cdot(1 + w) \Rightarrow z = i\cdot\frac{w+1}{w-1} \Rightarrow |z| = \left|i\cdot\frac{w+1}{w-1}\right| \Rightarrow 1 = |i|\cdot\left|\frac{w+1}{w-1}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{w+1}{w-1}\right| = 1 \Rightarrow |w + 1| = |w - 1|.$$ Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η μεσοκάθετος ευθεία στο τμήμα ΑΒ, όπου Α(1, 0) και Μ(−1, 0), άρα η ευθεία κατακόρυφη ευθεία x = 0. (Δηλαδή ο w πρέπει να είναι φανταστικός)

ΑΣΚΗΣΗ 2
Αν η εικόνες του μιγαδικού αριθμός w είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το
Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 4, και ισχύει w = $\frac{z+16}{z+4}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.
Υπόδειξη
$|w| = 4 \Rightarrow \left|\frac{z+16}{z+4}\right| = 4 \Rightarrow |z + 16| = 4\cdot|z + 4| \Rightarrow |z + 16|^2 = 16\cdot|z + 4|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z+16)\cdot(\bar{z}+16) = 16\cdot(z+4)\cdot(\bar{z}+4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow |z| = 4$

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) , ακτίνα ρ = 1.

ΑΣΚΗΣΗ 3
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z που περιγράφονται από την εξίσωση $|2\cdot z + 3| = 1$.
Υπόδειξη
$|2\cdot z + 3| = 1 \Rightarrow \left|2\cdot\left(z+\frac{3}{2}\right)\right| = 1 \Rightarrow |2|\cdot\left|z+\frac{3}{2}\right| = 1 \Rightarrow \left|z+\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $K\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις
(α). $|z - 2| + |z - 5| = 6$ (β). $|z - 2| - |z - 5| = 1$
Υπόδειξη
(α). Αν Μ(x, y) η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$
Και Α(2, 0) , Β(5, 0) οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 2$, $z_2 = 5$
Η απόσταση ΜΑ = $|z - 2|$, η απόσταση ΜΒ = $|z - 5|$
Η σχέση γράφεται $|z - 2| + |z - 5| = 6 \Rightarrow$ ΜΑ + ΜΒ = 6, είναι έλλειψη
Με μεγάλο άξονα $2\cdot\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$, εστιακή απόσταση $2\cdot\gamma = |5 - 2| = 3$
με κέντρο $K\left(\frac{5+2}{2}, 0\right) = K\left(\frac{7}{2}, 0\right)$. άρα η εξίσωσή της έλλειψης είναι

$\frac{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{27}{4}} = 1$, διότι $\beta^2 = \sqrt{\alpha^2-\gamma^2} = \sqrt{9-\frac{9}{4}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$.

(β). Αν Μ(x, y) η εικόνα του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$
Και Α(2, 0) , Β(5, 0) οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 2$, $z_2 = 5$
Η απόσταση ΜΑ = $|z - 2|$, η απόσταση ΜΒ = $|z - 5|$
Η σχέση γράφεται $|z - 2| + |z - 5| = 6 \Rightarrow$ ΜΑ – ΜΒ = 1,
Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κλάδος υπερβολής.με απόσταση κορυφών
$2\cdot\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$, εστιακή απόσταση $\gamma = |5 - 2| = 3$, και κέντρο $K\left(\frac{7}{2}, 0\right)$.

Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι $\dfrac{\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2}{9}-\dfrac{y^2}{\dfrac{27}{4}}=1$, με β = $\sqrt{2}$

Επειδή $|z-2| \geq |z-5| \Rightarrow x \geq 4$. Η υπερβολή έχει μόνον έναν κλάδο.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + i\cdot y$, που ικανοποιούν την εξίσωση $|z + 2\cdot i| = |z| + 2$.

Απάντηση

$|z + 2\cdot i| = |z| + 2 \Rightarrow |z + 2\cdot i|^2 = (|z| + 2)^2 \Rightarrow (z+2\cdot i)\cdot(\bar{z}-2\cdot i) = |z|^2+4\cdot|z|+4$

$\Rightarrow |z|^2-2\cdot i\cdot z+2\cdot i\cdot \bar{z}+4 = |z|^2+4\cdot|z|+4 \Rightarrow -2\cdot i\cdot(z-\bar{z}) = 4\cdot|z| \Rightarrow |z|=y \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = y \Rightarrow x^2 + y^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών z , αν ο αριθμός $w = z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός.

Υπόδειξη

$w \in R \Leftrightarrow \bar{w}=w \Rightarrow z+\dfrac{1}{z} = \bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}} \Rightarrow |z|^2\cdot\bar{z}-|z|^2\cdot z+z-\bar{z}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z-\bar{z})\cdot(|z|^2-1)=0$. Άρα οι εικόνες του μιγαδικού είναι όλα τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών και τα σημεία του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ = 1

ΑΣΚΗΣΗ 7

Έστω $z = x + i\cdot y$, με $x, y \in R$ και $x\cdot y = 1$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $w = z^2$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Απάντηση

Έστω $w = \alpha + i\cdot\beta$, με $\alpha, \beta \in R$, ισχύει $w = z^2 \Rightarrow \alpha + i\cdot\beta = x^2 - y^2 + 2\cdot i\cdot x\cdot y$

$\left.\begin{cases}\alpha=x^2-y^2\\ \beta=2\cdot x\cdot y\end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases}\alpha=x^2-y^2\\ \beta=2\end{cases}\right\} \Rightarrow z = k + i\cdot 2$, όπου $k = x^2 - y^2$.

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού w είναι όλα τα σημεία της μορφής Μ(κ, 2)

Δηλαδή σημεία της οριζόντιας ευθείας y = 2.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αν μιγαδικός $z = x + i\cdot y$, με $x, y \in R$, ώστε $|z| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) όταν ισχύει η σχέση : $x + i\cdot y = 2 + i\cdot z$.

Απάντηση

Ισχύει : $\left.\begin{cases}|z|=1\\ x+i\cdot y=2+i\cdot z\end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases}|z|=1\\ z=\dfrac{x+i\cdot y-2}{i}\end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases}|z|=1\\ |z|=\dfrac{|(x-2)+i\cdot y|}{|i|}\end{cases}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |(x-2)+i\cdot y|=1 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1.$

Οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) , ακτίνα ρ = 1

ΑΣΚΗΣΗ 9

Αν για τον μιγαδικό αριθμό ισχύει ότι $\left|z+4\cdot i\right|^2-\left|z+3\right|^2=17$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z = x + i·y, όπου x, y ∈ R.

Απάντηση

Έστω z = x + i·y, με x, y ∈ R. Τότε έχουμε

$\left|z+4\cdot i\right|^2-\left|z+3\right|^2=17 \Rightarrow \left|x+\left(y+4\right)\cdot i\right|^2-\left|\left(x+3\right)+y\cdot i\right|^2=17 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+\left(y+4\right)^2-\left(x+3\right)^2-y^2=17 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 3\cdot x-4\cdot y+5=0$. ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ 10

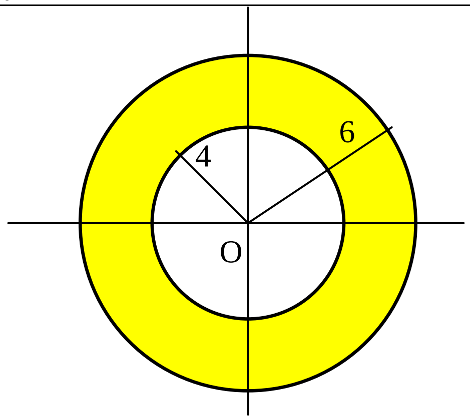
Ποιοι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν την σχέση $4 \le \left|z+4+2\cdot i\right| \le 6$. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

Απάντηση

Έστω Μ η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού z = x + i·y, με x, y ∈ R.

Και έστω K(–4, –2) η εικόνα του μιγαδικού $z_0 = -4-2\cdot i$.

Η εξίσωση $\left|z+4+2\cdot i\right| = 4 \Rightarrow MK = 4$, παριστάνει γεωμετρικά τα σημεία του κύκλου με κέντρο το Κ και ακτίνα ρ = 4.
Η εξίσωση $\left|z+4+2\cdot i\right| = 6 \Rightarrow MK = 6$, παριστάνει γεωμετρικά τα σημεία του κύκλου με κέντρο το Κ και ακτίνα ρ = 6.
Η σχέση που μας δίδεται
$4 \le \left|z+4+2\cdot i\right| \le 6 \Rightarrow 4 \le MK \le 6$,
περιγράφει όλα τα σημεία που ορίζονται μεταξύ των δύο κύκλων.
(δηλαδή, του κυκλικού δακτυλίου).



ΑΣΚΗΣΗ 11

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την μετρική σχέση : $\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|=2$, με $z \neq 0$

Απάντηση

$$\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|=2 \Rightarrow \left|\frac{z\cdot\overline{z}+1}{\overline{z}}\right|=2 \Rightarrow \left|\frac{\left|z\right|^2+1}{\overline{z}}\right|=2 \Rightarrow \frac{\left|\left|z\right|^2+1\right|}{\left|\overline{z}\right|}=2 \Rightarrow \left|z\right|^2+1=2\cdot\left|z\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|z\right|^2-2\cdot\left|z\right|+1=0 \Rightarrow \left(\left|z\right|-1\right)^2=0 \Rightarrow \left|z\right| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο K(0, 0) και ακτίνα ρ = 1.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z = x + i·y, με x, y ∈ R ώστε να ισχύει $\left|4\cdot z-\overline{z}\right|=15$.

Υπόδειξη

$$\left|4\cdot z-\overline{z}\right|=30^2 \Rightarrow \left(4\cdot z-\overline{z}\right)\cdot\left(4\cdot\overline{z}-z\right)=30^2 \Rightarrow 16\cdot\left|z\right|^2-4\cdot z^2-4\cdot\overline{z}^2+\left|z\right|^2=30^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17\cdot|z|^2-4\cdot\left(z^2+\overline{z}^2\right)=225 \Rightarrow 17\cdot\left(x^2+y^2\right)-8\cdot\left(x^2-y^2\right)=225\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot x^2+25\cdot y^2=225 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$ Έλλειψη με α = 10, β = 6 , γ = 8

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις

(α). $\left(z+\overline{z}\right)^2-\left(z+\overline{z}\right)-2\cdot|z|^2=0$ (β). $|z-i|+|z+i|=4$

Υπόδειξη

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z = x + i·y, όπου x, y ∈ R και ικανοποιούν τις ισότητες

(α). $|z-i| + |z-1| = 2$ (β). $|z+2| - |z-2\cdot i| = 2$

(γ). $2\cdot|z-3| + 4\cdot Re(z) - 15 = 0$ (δ). $z^2+\overline{z}^2-z\cdot\overline{z}+\left(z-\overline{z}\right)\cdot i=0$

Πολυχρονιάδης Α. Νικόλαος
http://1lyk-ptolem.koz.sch.gr