ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1). Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ; (λεκτική περιγραφή – τύπος – σχήμα) (μόρια 9)

Α2). Οι μιγαδικοί αριθμοί z και − z , έχουν αντίθετα μέτρα   Σ   Λ

Α3). Για μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 Ισχύει ότι $\left|\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|\overline{z_2}|}$ Σ   Λ

Α4). Όταν δύο μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$ Σ   Λ

Α5). Αν τρεις μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα, τότε βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου   Σ   Λ   (μόρια 16)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Αν $z_1, z_2 \in C$ Δείξτε ότι :

Β2). $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}\cdot z_2 + z_1\cdot \overline{z_2}$.

Β3). $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \overline{z_1}\cdot z_2 - z_1\cdot \overline{z_2}$.

Β4). $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$.   (μόρια 25)

ΘΕΜΑ Γ

Δίδονται οι μιγαδικοί $w = \frac{z + i\cdot\overline{z}}{\overline{z} - i\cdot z}$ και $v = \frac{\overline{z} - i\cdot z}{z + i\cdot\overline{z}}$, όπου z = x + i·y, με x, y ∈ R και επιπλέον $\overline{z} \neq -i\cdot z$ και $z \neq -i\cdot\overline{z}$.

Γ1). Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί w και v είναι φανταστικοί αριθμοί.   (μόρια 16)

Γ2). Να αποδείξετε ότι $w^{2008} + v^{2008} = 2$.   (μόρια 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν Α, Β, Γ είναι εικόνες των αριθμών 1, −1 + 2·i, −1 – 2i αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.   (μόρια 10)

Δ2). Αν z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ και $z_1 + z_2 + z_3 = -2\cdot i$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.   (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 2

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στην όποια κινείται η εικόνα του z.

1). $|z-2\cdot i|=|2+3\cdot i|$ 2). $|2-i\cdot z|=|z|$ 3). $|\overline{z}-3\cdot i|=|3-z|$. (μόρια 10)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1). Ισχύει ότι $|z+i|=\sqrt{z^2+1}$.

2). Ισχύει ότι $z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ w=0$

3). Ισχύει ότι $|z|=\sqrt{z^2}$

4). Ισχύει ότι $z\cdot w=0 \Leftrightarrow z=0\ \acute{\eta}\ \ w=0$

5). Ισχύει ότι $\overline{z}-z=2\cdot \mathrm{Im}\,z\cdot i$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Έστω $w=\dfrac{z-4}{z-i}$, $z=x+y\cdot i$ όπου (x, y) ≠ (0, –1), x, y ∈ R..Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $|w|=\sqrt{2}$. (μόρια 12)

Β2). Δίνεται ό μιγαδικός $z=\ 2|z|-1\ +(|z|-2)\cdot i$. Εάν ισχύει ότι : $\mathrm{Re}\,z\ ^{2} < \mathrm{Im}\,z\ ^{2}+1$, να δείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κυκλικό δίσκο. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: C-\ -1\ \to C$ με $f(z)=\dfrac{z+i}{\overline{z}+1}$.

Γ1). Αν $|f(z)|=1$, να δείξετε ότι $\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^{4k}=1, k\in N^*$. (μόρια 10)

Γ2). Να δειχθεί ότι $f(i\cdot\overline{z})\cdot f(z)=-1$. (μόρια 5)

Γ3). Αν f(z) ∈ I, να βρεθεί ο γ. τόπος της εικόνας του z. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν οι σχέσεις $|z-12-6\cdot i|=|z-4|$ (1) και $2\cdot|w+i|^2=|w-i|^2+17$ (2).

Δ1). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των M(z). (μόρια 10)

Δ2). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των N(w). (μόρια 10)

Δ3). Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$. (μόρια 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 3

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αν $\alpha + \beta\cdot i$, $\gamma + \delta\cdot i$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ και $\gamma + \delta\cdot i \neq 0$, να αποδείξετε

Ότι : $\dfrac{\alpha+\beta\cdot i}{\gamma+\delta\cdot i} = \dfrac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \dfrac{\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cdot i$ (μόρια 9)

Α2). Στον διπλανό πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Ι είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της Στήλης ΙΙ (δύο αριθμοί στη Στήλη ΙΙ περισσεύουν).
Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Ι του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης ΙΙ, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
	1. $-i$
Α. i^1	2. $+1$
Β. i^2	3. i
Γ. i^3	4. -1
Δ. i^4	5. 0
	6. 4

(μόρια 4)

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

β). Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

γ). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών εκφράζει, στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

δ). Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα
$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

ε). Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$ με α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει :
$z_1 = \bar{z_2}$.

στ). Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^\nu\cdot z$, $\nu \in N^*$, τότε ισχύει :
$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 1$. (μόρια 12)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + y\cdot i$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε να ισχύει: $\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2\cdot i}\right)^2\cdot i = \alpha + (1-\alpha)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι :

Β1). αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$. (μόρια 5)

Β2). αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$. (μόρια 5)

Β3). για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$. (μόρια 7)

Β4). Οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z ,w για τους οποίους ισχύει η σχέση
$|w|\cdot(z-\bar{z})+(w\cdot\bar{w}-12)\cdot(z+\bar{z})\cdot i=0$.

Γ1). Να δείξετε ότι ο z δεν μπορεί να είναι φανταστικός αριθμός. (μόρια 7)

Γ2). Να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (μόρια 9)

Γ3). Αν η ευθεία πάνω στην οποία κινείται η εικόνα του z είναι η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου των αξόνων, να δείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα ρ = 3. (μόρια 9)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $z+\dfrac{k^2}{z}=k$ με k θετικό πραγματικό αριθμό.

Να δείξετε :

Δ1). $|z|=2\cdot\mathrm{Re}(z)=k$ (μόρια 10)

Δ2). $z^2+|z|\cdot\bar{z}=0$ (μόρια 6)

Δ3). $\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^{2004}=1$ (μόρια 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 4

ΘΕΜΑ 1

Α1). α). Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z ;

β). Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta\cdot i$. Ποιος τύπος δίνει το μέτρο του z συναρτήσει των α και β ;

(μόρια 10)

Α2). Να γράψετε την μιγαδική εξίσωση του κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_1 και ακτίνα α. Η απάντηση να δικαιολογηθεί. (μόρια 7)

Α3). α). Ποια είναι η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού: $z_1 - z_2$.

β). Τι παριστάνει γεωμετρικά η εξίσωση: $|z - z_2| = |z - z_1|$.

γ). Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - (1 + 3\cdot i)| = 2$ οπού $z = x + i\cdot y$ με x, $x \in R$

δ). Τι παριστάνει η εξίσωση $|z + 2| = |z - i|$, οπού $z = x + i\cdot y$. (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z + 2\cdot i}{z - 2\cdot i}$, $z \in C$

Β1). Δείξτε ότι: $|f(z)| = 1$. (μόρια 8)

Β2). Αν ισχύει η ισότητα $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, να αποδείξτε ότι $z \in I$. (μόρια 7)

Β3). Λύστε την εξίσωση : $f(z) = i$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z \in C^*$, για τους οποίους Ισχύει : $\left|1 - \dfrac{2}{z}\right| = 1$. (μόρια 10)

Γ2). α). Έστω οι μιγαδικοί $w_1 = (x + i\cdot y)^\nu + (x\cdot i - y)^\nu$ και $w_2 = (x + i\cdot y)^\nu\cdot(1 + i^\nu)$ με $x, y \in R$, $\nu \in N^*$. Να δείξετε ότι $w_1 = w_2$.

β). Να υπολογίσετε το $\nu \in N^*$, ώστε να ισχύει: $(x + i\cdot y)^\nu + (i\cdot x - y)^\nu - (x + i\cdot y)^\nu\cdot(2 + i^\nu) = 8$, αν γνωρίζετε ότι οι εικόνες M(z) των μιγαδικών $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = \sqrt[9]{2}$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί: $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = 1 - i\cdot\sqrt{3}$

Δ1). Υπολογίστε τον $\dfrac{z_1}{z_2}$ και κατόπιν αποδείξτε ότι : $\dfrac{\alpha\cdot z_1 - z_2}{z_1 + \alpha\cdot z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$, οπού $\alpha \in R$. (μόρια 7)

Δ2). Δείξτε ότι $z_1^{22} + z_2^{22} = 0$ και κατόπιν να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in N$ ώστε να ισχύει $z_1^k + z_2^k = 0$

(μόρια 5)

Δ3). Αν Α, Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα και O(0, 0), να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, και να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του. (μόρια 7)

Δ4). Αν η εικόνα του $w \in C$ στο επίπεδο είναι κύκλος κέντρου O(0, 0) και ακτίνας $\rho = 3$, να δείξετε ότι η μεγίστη τιμή του $\left|\dfrac{w - z_1}{w + z_2}\right|$ είναι 5. (μόρια 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΚΑΔΙΚΟΙ 5

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αν $z_1, z_2 \in$ C να δείξετε ότι $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (μόρια 5)

Α2). Χαρακτηρίστε τις προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1)$\cdot$ $|z^2| = -z^2 \Leftrightarrow z \in R$.

2). ισχύει $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

3). $|z_1 + z_2|^2 = z_1^2 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_2^2$.

4). Για κάθε $\lambda \in$ R, $z \in$ C ισχύει, $|\lambda \cdot z| = \lambda \cdot |z|$.

5). Αν M_1, M_2 παριστάνουν τους μιγαδικούς z_1, z_2. στο μιγαδικό επίπεδο τότε: $z_1 - z_2 = \overrightarrow{M_1M_2}$.

6). Αν Α, Β παριστάνουν τους μιγαδικούς z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και $OA \perp OB$ όπου Ο η αρχή των αξόνων, ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 - z_2)^2$

7). Αν ο ακέραιος λ είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε : $i^{\lambda} + i^{\lambda+3} + i^{\lambda+5} - I^{\lambda+2} = 0$.

8). Ισχύει ότι $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{1 + 3 \cdot z_1}\right| = \dfrac{|z_1 + z_2|}{1 + 3|z_1|}$.

9). Ο αριθμός $(\alpha + \beta \cdot i)^{100} + (i \cdot \beta - \alpha)^{100}$ είναι πραγματικός.

10).Αν $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς z_1, z_2 τότε $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \bar{z}_2\right) = 0$ (μόρια 20)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 όταν $|z_1| < 1$ *και* $|z_2| < 1$ να δειχτεί οτι $|z_1 z_2| < |1 - \bar{z}, z_2|$. (μόρια 12)

Β2). Αν ισχύει η σχέση $z + \bar{z} = 2|z|$, να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός θετικός. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Για κάθε μιγαδικό $z \neq 1$ να δείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |z| > 1$. (μόρια 10)

Γ2). α). Να δειχθεί ότι : $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z$. (μόρια 2)

β).Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι, ο μιγαδικός $w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, είναι πραγματικός. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f(z) = |i \cdot z - 1|, z \in C$

Δ1). Αν $f(z) = f(\bar{z})$ να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός. (μόρια 8)

Δ2). Αν $f(z) = 5$, να βρείτε το γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z. (μόρια 9)

Δ3) Αν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί με $f(z_1) = f(z_2) = 5$ να δειχθεί ότι $|z_1 - z_2| \leq 10$. (μόρια 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 6

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στην οποία κινείται η εικόνα του z.

1). $|z-2\cdot i|=|2+3\cdot i|$

2). $|2-i\cdot z|=|z|$.

3). $|\overline{z}-3\cdot i|=|3-z|$. (μόρια 12)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1). Ισχύει ότι $|z+i|=\sqrt{z^2+1}$

2). Ισχύει ότι $z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; w=0$.

3). Ισχύει ότι $|z|=\sqrt{z^2}$.

4). Ισχύει ότι $z\cdot w=0 \Leftrightarrow z=0 \;\; \acute{\eta} \;\; w=0$

5). Ισχύει ότι $\overline{z}-z=2\cdot \operatorname{Im} z\cdot i$. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Έστω $w=\dfrac{z-4}{z-i}$, $z=x+y\cdot i$ όπου $x,y \neq 0,-1$, $x,y\in R$.

Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $|w|=\sqrt{2}$.
(μόρια 12)

Β2). Δίνεται ό μιγαδικός $z= 2|z|-1 +(|z|-2)\cdot i$. Εάν ισχύει ότι: $\operatorname{Re} z^{2} < \operatorname{Im} z^{2} +1$, να δείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κυκλικό δίσκο. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:C- -1 \to C$ με $f(z)=\dfrac{z+i}{\overline{z}+1}$.

Γ1). Αν $|f(z)| = 1$, να δείξετε ότι : $\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^{4k}=1,\; k\in N^*$. (μόρια 10)

Γ2). Να δειχθεί ότι $f(i\cdot\overline{z})\cdot f(z)=-1$. (μόρια 5)

Γ3). Αν f(z) ∈ I, να βρεθεί ο γ. τόπος της εικόνας του z. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν οι σχέσεις $|z - 12 - 6\cdot i| = |z - 4|$ (1)
και $2\cdot|w + i|^2 = |w - i|^2 + 17$. (2).

Δ1). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των Μ(z). (μόρια 10)

Δ2). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των Ν(w). (μόρια 10)

Δ3). Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$. (μόρια 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 7

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού z. (μόρια 4)

Α2). Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 ισχύει ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (μόρια 8)

Α3). Αν α, β μιγαδικοί αριθμοί και z = α + β·i , τότε ο συζυγής του z είναι ο :

[Α]. β + α·i [Β]. α – β·i [Γ]. $\overline{\alpha} + \overline{\beta} \cdot i$ [Δ]. $\overline{\alpha} - \overline{\beta} \cdot i$ [Ε]. $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$. (μόρια 4)

Α4). Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z ,w ισχύει ότι :

$$\left|\overline{z} \cdot w + 1\right|^2 - \left|z \cdot \overline{w} - 1\right|^2 = 4 \cdot \text{Re}\ \overline{z} \cdot w$$ (μόρια 9)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός z ≠ –1 και ο w = $\dfrac{z-5}{z+1}$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός. (μόρια 9)

Β2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z αν $|w| = 2$. (μόρια 8)

Β3). Αν $|w| = 2$ τότε να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - 1 - 3 \cdot i|$ (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Δίδεται ο z = x + i·y , x, y ∈ R και x ≠ 0 , y ≠ 1. Αν $\left|\dfrac{z - 2 \cdot i}{z + i}\right| = 2$, τότε :

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β). Προσδιορίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία. (μόρια 15)

Γ2). Να βρείτε τον μιγαδικό z , για τον οποίο ικανοποιούνται οι σχέσεις

Re(z + 3) = Im(2·i − z) −2 , και Re(z2) = 9. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). α). να αποδείξετε ότι $|z - i| = |1 + i \cdot z|$.

β). Αν γνωρίζουμε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ≠ i, ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού w = $\dfrac{z \cdot\ z - i}{1 + i \cdot z}$. (μόρια 10)

Δ2). Αν ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, να δείξετε ότι : $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0$, και επίσης να δείξετε ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός. (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 8

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω Μ(x, y) η εικόνα του μιγαδικού $z = x + y \cdot i$ στο μιγαδικό επίπεδο.
Τι εκφράζει το μέτρο του z ; (μόρια 9)

Α2). Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις
1). Αν M_1M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, τότε το μήκος τους ευθυγράμμου τμήματος (M_1M_2) είναι ....
2). Η εξίσωση : $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο .... και ακτίνα ....
3). Η εξίσωση : $|z - z_1 = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία .... και .... (μόρια 6)

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)
1). Αν $z_1, z_2 \in C$, τότε : $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$.
2). Αν $z \in C$, τότε : $|z| - |-\bar{z}| = 0$
3). Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1| = |z_2|$, τότε : $z_1 = z_2$.
4). Αν $z \in C$, τότε είναι : $z^2 \geq 0$.
5). Η $Im(z) = 0$, τότε ισχύει : $|z|^2 = z^2$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Β

Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει :
$\left|(i + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot z\right| = 6 \quad (1)$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3 \cdot i)| \quad (2)$, τότε να βρείτε :
Β1). Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
Β2). Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
Β3). Την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
Β4). Την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$. (μόρια 25)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Για τον μιγαδικό z δίνεται ότι : $|i \cdot z + 2 + 3 \cdot i| = 4 \quad (1)$
α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.
β). Αν $u = 1 - 2 \cdot i$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - u|$.
γ). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w = 3 \cdot z - 1 - 3 \cdot i$. (μόρια 12)

Γ2). Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ να αποδείξετε ότι ισχύει : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \; |z_1|^2 + |z_2|^2$. (μόρια 13)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + i \cdot y$, για τον οποίο ισχύει : $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$. (μόρια 15)
α). Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού Α(z) κινούνται σε υπερβολή
β). Να αποδείξετε ότι : $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$.

Δ2). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta \cdot i$, όπου $\alpha, \beta \in R$ και $w = 3 \cdot z - i \cdot \bar{z} + 4$. (μόρια 10)
Να αποδείξετε ότι : α). $Re(w) = 3 \cdot \alpha - \beta + 4$. β). $Im(w) = 3 \cdot \beta - \alpha$.
γ). Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, αν γνωρίζουμε ότι οι εικόνες του μιγαδικού w κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 9

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). Πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί ονομάζονται συζυγείς ;

β). Δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίδιο μέτρο Σ Λ

γ). Δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο Σ Λ

δ). Ισχύει για δύο συζυγείς μιγαδικούς ότι $z^2 = \bar{z}^2$ Σ Λ

ε). Ισχύει για δύο συζυγείς μιγαδικούς $z - \bar{z} = 2\cdot\mathrm{Im}(z)$ Σ Λ (μόρια 10)

Α2). Αν $z = (1 - i\cdot\sqrt{3})^3$, τότε Re(z) είναι :

[Α]. 2 [Β]. 4 [Γ]. – 8 [Δ]. 0 [Ε]. 8 (μόρια 5)

Α3). Για ποια ελάχιστη θετική τιμή του $\nu \in Z$ ισχύει $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\nu} = 1$; (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 + i\cdot\sqrt{3}$, $w = \frac{z}{1+|z|}$, τότε ισχύει $|w| = \frac{2}{3}$. (μόρια 10)

Β2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z \neq 0$ ώστε $\mathrm{Re}\left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$. (μόρια 10)

Β3). Αν z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ και $z_1 + z_2 + z_3 = -2\cdot i$, τότε η παράσταση $A = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ είναι ίση με

[Α]. – 1 [Β]. 1 [Γ]. i [Δ]. – i [Ε]. $\frac{i}{2}$ (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Αν $z = \beta\cdot x + \alpha\cdot y\cdot i$, $w = x + i\cdot y$, $\alpha, \beta \in R - \{0\}$ και ισχύει η σχέση : $|z| = \alpha\cdot\beta$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των της εικόνας του z και ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.

Γ2). Η εξίσωση $x^2 - \alpha\cdot x + 6 = 0$, $\alpha \in R$ μπορεί να έχει ρίζα τον αριθμό

[Α]. i [Β]. 3 + i [Γ]. $2 + i\cdot\sqrt{2}$ [Δ]. 4 + 2·i [Ε]. 5 – i

Ποια είναι η τιμή του α.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο Ο(0, 0) και ακτίνα 4.

α). Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού w , όπου $w = \frac{z-8}{z-2}$, $z \neq 2$

β). Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w; (μόρια 15)

Δ2). Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, αν γνωρίζουμε ότι ο μιγαδικός $\left(w + \frac{\lambda}{w}\right) \in R$ όπου $w \neq 0$ και $w \notin R$. (μόρια 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 10

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ;

β). Οι μιγαδικοί αριθμοί z και − z , έχουν αντίθετα μέτρα Σ Λ

γ). Για μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 Ισχύει ότι $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|\bar{z}_1|}{|\bar{z}_2|}$ Σ Λ

δ). Όταν δύο μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ Σ Λ

ε). Αν τρεις μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα, τότε βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου Σ Λ (μόρια 10)

Α2). Να δείξετε ότι για κάθε $z \in C \setminus \{0\}$ ισχύει $\left|z + \frac{1}{\bar{z}}\right| = |z| + \frac{1}{|z|}$. (μόρια 10)

Α3). Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 - 3\cdot i$, η μικρότερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ Είναι : [Α]. 0 [Β]. 5 [Γ]. 8 [Δ]. 1 [Ε]. 2 (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει :

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$. (μόρια 10)

Β2). Αν ισχύει $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, να δείξετε ότι :

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, Και να ερμηνευθεί γεωμετρικά. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z, με εικόνες M(x, y) αν ισχύει $z + \frac{1}{z} = \alpha$,

Όπου $\alpha \in R^*$. (μόρια 10)

Γ2). Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιεί την μετρική σχέση :

$$\frac{1}{|z - 3\cdot i|} + \frac{1}{|z + 3\cdot i|} = \frac{10}{|z^2 + 9|}.$$ (μόρια 8)

Γ2). Αν ισχύει για τον μιγαδικό ν η σχέση $|\nu - i| = 2$, να βρεθεί ο γ,τ. των μιγαδικών $z = \frac{1}{\nu}$.

(μόρια 7)

ΘΕΜΑ Δ

Αν Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, και Ο η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι :

Δ1). Αν ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 0$, τότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

Δ2). Αν ισχύει $z_1^2 + z_2^2 + z_1\cdot z_2 = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

Δ3). Αν για τρείς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν $z_1^2 = \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3$, $z_2^2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_3$, $z_3^2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

α). Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία ομοκυκλικά.

β). να αποδείξετε ότι : $|z_1 + z_2| = |z_2 + z_3| = |z_3 + z_1|$. (μόρια 5 + 10 + 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 11

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αν z ∈ C, να δείξετε ότι: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. (μόρια 13)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. (μόρια 2)

β). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. (μόρια 2)

γ). Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1). $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ 2). $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3). $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$ 4). $|z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$

όπου $z_1 = α + β \cdot i$ και $z_2 = γ + δ \cdot i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Αν z = 3 – 4·i και | w| = 2, να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή της παράστασης | z – w| και | z + w | . (μόρια 10)

Β2). Έστω z ∈ C, z ≠ 3i και $w = \dfrac{z - i}{i \cdot z + 3}$.

α). Να βρεθεί ο γ.τ των εικόνων Μ του z, όταν w ∈ I. (w – φανταστικός).

β). Αν | z| = 1, να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων του w. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f με f(z) = $\dfrac{(z - i) \cdot (\bar{z} + i)}{z + \bar{z}}$, z ∈ C και Re(z) ≠ 0.

Γ1). Να δείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.

Γ2). Να δείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{-i \cdot z}\right) \in R$.

Γ3). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

$\mathrm{Re}\left(f\left(\dfrac{1}{z}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(f\left(\dfrac{i}{z}\right)\right) + 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$. (μόρια 8 + 8 + 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν z ∈ C να δείξετε ότι: Αν $|z - i| = 1$, τότε $4 \le |z + 4 + 2 \cdot i| \le 6$. (μόρια 12)

Δ2). Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας ρ = 1, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού w = $\dfrac{3 \cdot z + i}{i \cdot z - 3}$. (μόρια 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 12

ΘΕΜΑ Α

Α1). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (μόρια 10)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:
[α]. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ [β]. $|z^2| = z^2$ [γ]. $|z| = -|\overline{z}|$ [δ]. $|z| = |\overline{z}|$ [ε]. $|i \cdot \overline{z}| = |z|$. (μόρια 5)

Α3). Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$ να δείξετε ότι $z \cdot \overline{z} = 1$. (μόρια 5)

Α4). Η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών $A(z_1)$ και $B(z_2)$ ισούται με . . . . (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Αν ο αριθμός 1 + i είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha \cdot x^2 + x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\alpha, \beta \in R$, να υπολογιστούν τα α και β. (μόρια 10)

Β2). Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = (1 + i^{\nu}) \cdot (1 - i^{2\cdot\nu})$, $\nu \in N^*$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). α). Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$ με $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ και Α, Β, Γ αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο $\mathrm{Im}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = 0$. (μόρια 10)

β). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες του $z \in C^*$ ώστε οι εικόνες των $i \cdot z$, z και i να είναι συνευθειακά σημεία. (Δίδεται $z \neq i$)

Γ2). Αν $z_1, z_2 \in C$ και ισχύει $|z_1 + z_2 - 3| = |z_1 - 2| = |z_2 - 1|$. Να δείξετε :

α). $\left(\frac{z_1 - 2}{z_2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - 2}{z_2 - 1}\right) + 1 = 0$ β). $\left(\frac{z_1 - 2}{z_2 - 1}\right)^3 = 1$ (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $f(z) = (z - 1) \cdot (\overline{z} - i)$ με $z = x + y \cdot i$ και $x, y \in R$.

Δ1). Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 1 + 2 \cdot i$. (μόρια 9)

Δ2). α). Να εκφράσετε το $\mathrm{Re}(f(z))$ και το $\mathrm{Im}(f(z))$ ως συνάρτηση των x και y. (μόρια 8)

β). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z, όταν ο f(z) είναι φανταστικός, είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ3). Να αποδείξετε ότι :

α). αν $\overline{f(z)} = -f(z)$, τότε $x^2 + y^2 = x - y$,

β). αν $f(z) = f(\overline{z})$, τότε ο z είναι πραγματικός. (μόρια 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 13

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). να αποδείξετε ότι $|z - i| = |1 + i\cdot z|$.

β). Αν γνωρίζουμε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z \neq i$, ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = \dfrac{z\cdot\ \ z - i}{1 + i\cdot z}$. (μόρια 10)

Α2). Να βρεθεί ο γ.τ. των μιγαδικών $z = 3\cdot συνθ + 4\cdot i\cdot ημθ$, $θ \in (0, 2\cdot π)$. (μόρια 9)

Α3). Να απαντήσετε με την επιλογή σωστού (Σ) και λάθους (Λ) στα παρακάτω ερωτήματα.

α). Οι αριθμοί $2 - i\cdot z$ και $2 + i\cdot \overline{z}$, είναι συζυγείς. [Σ] [Λ]

β). Ισχύει ότι $z_1^2 = z_2^2$. [Σ] [Λ]

γ). Ισχύει ότι $\overline{\overline{z_2^2}} = z_1^2$ [Σ] [Λ] (μόρια 6)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Δίδεται ο $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ και $x \neq 0$, $y \neq 1$. Αν $\left|\dfrac{z - 2\cdot i}{z + i}\right| = 2$, τότε

α). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β). Προσδιορίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία. (μόρια 10)

Β2). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων z του οποίου τα σημεία ικανοποιούν την σχέση $Re(z - 3) = Im(z - 3)$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει η σχέση : $z^2 + i\cdot z - 1 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι ο $z^3 = -i$. (μόρια 10)

Γ2). Να λυθεί η εξίσωση $z^2 - 2\cdot i\cdot \overline{z} = 0$ (1). Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών ριζών της (1) δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν $z = x + i\cdot y$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός και Μ είναι η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο παραστήσατε γεωμετρικά το σύνολο των σημείων Μ τα οποία επαληθεύουν τις σχέσεις :

$|z - i| \leq 1$ και $|z| \leq \dfrac{z}{|-z|} + \dfrac{\overline{z}}{|\overline{z}|}$. (μόρια 10)

Δ2). Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους υποθέτουμε ότι ισχύουν :

$|z - 1| = |z - i|$ και $|w - 2| = 1$.

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $Α = |w - z|$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Α

Α1). 1). Η ισότητα $x + (y - 1)\cdot i = 3 + 4\cdot i$, ισχύει αν και μόνο αν

[Α]. $x = 3$ ή $y = 5$ [Β]. $x = 3$ και $y = 4$ [Γ]. $x = 3$ ή $y = 4$

[Δ]. $x = 3$ και $y = 5$ [Ε]. $x + y = 7$

2). Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)\cdot i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + i\cdot y$, ισούται με

[Α]. $1 - i$ [Β]. $1 + i$ [Γ]. $-1 - i$ [Δ]. $-1 + i$ [Ε]. $2 + 2\cdot i$

3). Η εξίσωση $z - (z - (1 + 2\cdot i)| = 4$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

[Α]. κέντρο $(-1, 2)$ και ακτίνα 4 [Β]. κέντρο $(1, -2)$ και ακτίνα 2

[Γ]. κέντρο $(1, -2)$ και ακτίνα 4 [Δ]. κέντρο $(1, 2)$ και ακτίνα 2

[Ε]. κέντρο $(1, 2)$ και ακτίνα 4

4). Αν $z = 3 + i\cdot y$ και $|z| = 5$, τότε μια τιμή του y είναι η

[Α]. $\sqrt{5}$ [Β]. 5 [Γ]. -4 [Δ]. $\sqrt{3}$ [Ε]. 3

5). Αν $A = i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$, τότε:

[Α]. $A = i$ [Β]. $A = -i$ [Γ]. $A = 0$ [Δ]. $A = -3$ [Ε]. $A = -10$ (μόρια 10)

Α2). Αν $z = \alpha + i\cdot\beta$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί στην ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β. (μόρια 5)

Στήλη Α		Στήλη Β	
Α	$\bar{z}$	1	$2\cdot\alpha$
Β	$z + \bar{z}$	2	$\alpha^2 + \beta^2$
Γ	$z - \bar{z}$	3	$\alpha + i\cdot\beta$
Δ	$z \cdot \bar{z}$	4	$\alpha - i\cdot\beta$
	$\lvert z\rvert^2$	5	$2\cdot i\cdot\beta$
		6	$2\cdot\alpha + i$

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α). $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ β). $|z|^2 = z^2$ γ). $|z| = -|\bar{z}|$ δ). $|z| = |\bar{z}|$ ε). $|z| = -|i \cdot \bar{z}|$ (μόρια 5)

Α4). Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 + 4\cdot i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\cdot i$. Να γράψετε στα φύλλα απαντήσεών σας τους αριθμούς της στήλης Α και δίπλα εκείνο το γράμμα της στήλης Β που πιστεύεται ότι συμπληρώνει σωστά την ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert =$	α. 4
2. $\lvert z_1^2\rvert =$	β. 2
3. $\lvert z_2\rvert^2 =$	γ. 25
4. $-\lvert\bar{z_1}\rvert =$	δ. -5
5. $\lvert i \cdot z_2\rvert =$	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

(μόρια 5)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Αν $|z_1| = 1$ και $|z_2| = 2$, να δείξετε ότι : $1 \le (z_1 + z_2)\cdot\left(\frac{1}{z_1}+\frac{4}{z_2}\right) \le 9$. (μόρια 5)

Β2). Αν ισχύει $|z - 3 + 4\cdot i| \le 8$, να δείξετε ότι $3 \le |z| \le 13$. (μόρια 5)

Β3). Να δείξετε ότι : $|z_1 - z_2| \le (1 + |z_1|^2)\cdot(1 + |z_2|^2)$. (μόρια 5)

Β4). Να δείξετε ότι : α). $|z| + |w| < 1 + |z\cdot w|$ β). $|z - w| < |1 - \bar{z}\cdot w|$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Δίνονται οι μιγαδικοί z , w οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{z+1}{z-i}$ με $z \ne i$.

Εάν $|w|=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z. (μόρια 10)

Γ2). Δίνονται οι μιγαδικοί z , w οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{z+i}{i\cdot z+2}$, με $z \ne 2\cdot i$,

Δείξτε ότι: εάν w φανταστικός τότε ο z φανταστικός. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί z , w οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση $w = \frac{z-1}{z+1}$ με $z \ne -1$ και $z = x + i\cdot y$.

Δ1). Να βρείτε το Re(w) και Im(w) ως συνάρτηση των x και y. (μόρια 6)

Δ2).Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z αν ισχύει $w \in I$. (μόρια 7)

Δ3). Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς και $z \in C$. Η εξίσωση έχει λύση το μιγαδικό $z_1 = 1 + i\cdot\sqrt{3}$.

α). Να βρείτε την άλλη λύση της εξίσωσης z_2. (μόρια 2)

β). Δείξτε ότι $\beta = -2$ και $\gamma = 4$. (μόρια 5)

γ). Να βρείτε την τιμή της παράστασης $z_1^6 + z_2^6$. (μόρια 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 15

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). Τι ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$;
Να αποδείξετε τον τύπο του και να ερμηνευθεί γεωμετρικά.

β). Σε κύκλωμα RLC η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος δίδεται από τον τύπο $z = R + i\cdot\left(L\omega - \dfrac{1}{C\cdot\omega}\right)$.

α). Να διατυπώσετε το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος RLC (εμπέδηση του κυκλώματος)

β). Ποια είναι η αντίσταση και το μέτρο του παραπάνω κυκλώματος όταν ισχύει $\omega = \sqrt{L\cdot C}$

(μόρια 7)

Α2). Επιλέξτε αν κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) τοποθετώντας σε κύκλο την κάθε σας επιλογή.

1). Για κάθε μιγαδικό αριθμό ισχύει $|-z| = -|z|$

2). Ισχύει για κάθε μιγαδικό z , ότι $z^2 = |z|^2$

3). Πάντα ισχύει ότι $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

4). Αν $|z_1| = |z_2|$, τότε $z_1 = z_2$

5). Αν για μιγαδικό αριθμό $z = x + i\cdot y$, και ισχύει $|z - 1| = 1$, τότε η εικόνα του μιγαδικού M(x, y) βρίσκεται επί του κύκλου $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

6). Αν για μιγαδικό αριθμό $z = x + i\cdot y$ ισχύει $z = \bar{z}$, τότε $y = 0$

7). Αν $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$ και $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$ και $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ οι εικόνες τους τότε η απόσταση M_1M_2 είναι ίση με $|z_1 - z_2|$

8). Αν $|z| = 1$, τότε $z = \bar{z}$

9). Αν $z = συν(\pi - \theta) + i\cdot ημ(\pi - \theta)$, τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z βρίσκεται στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα $\rho = 1$.

10).Η εξίσωση $z^3 + 3\cdot z^2 + 5\cdot z + 1$, έχει ακριβώς τρεις μιγαδικές ρίζες

(μόρια 10)

Α3). α). Αν $1 + i$, είναι ρίζα του πολυώνυμου $P(x) = x^2 - \alpha\cdot x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$ τότε τα α, β είναι

[Α]. $\alpha = 2$, $\beta = 2$ [Β]. $\alpha = -2$, $\beta = 2$ [Γ]. $\alpha = -2$, $\beta = -2$

[Δ]. $\alpha = 2$, $\beta = -2$ [Ε]. κανένα από τα προηγούμενα

β). Έστω $w = \alpha + \beta\cdot i$ τότε ποιο από τα παρακάτω δεν είναι σωστό :

[Α]. $|w| = |\bar{w}|$ [Β]. $|\bar{w}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ [Γ]. $|w|^2 = w^2$ [Δ]. $|w^2| = |\bar{w}|^2$.

(μόρια 8)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = -i$. (μόρια 5)

Β2). Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + i\cdot y$, που ικανοποιούν την εξίσωση $|z + 2\cdot i| = |z| + 2$, είναι πραγματικοί. (μόρια 10)

Β3). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την μετρική σχέση : $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$, με $z \neq 0$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Αν ο $z = 2\cdot i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2\cdot z^3 + 3\cdot z^2 + 8\cdot z + \alpha = 0$, $\alpha \in R$

α). Να βρεθεί ο αριθμός α β). Να λυθεί η εξίσωση. (μόρια 10)

Γ2). Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + i\cdot y$ για τους οποίους ισχύει : $\left|\frac{z+4}{z+1}\right| = 2$ (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται το πολυώνυμο $f(z) = z^4 + \alpha\cdot z^3 - 5\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Δ1). Να βρεθούν οι α, β, γ ώστε το πολυώνυμο f(z) να έχει παράγοντα τον $g(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. (μόρια 8)

Δ2). Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 0$. (μόρια 7)

Δ3). Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $f(z) = 0$. (μόρια 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 16

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αποδείξτε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \sqrt{2}\cdot i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 - i$,
Βρίσκονται επάνω σε κύκλο με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα $\sqrt{2}$.
Ακόμα να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.
(μόρια 10)

Α2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = x + i\cdot y$ αν ισχύει $\left(\frac{z}{z+5}\right) \in I$,
με $z \neq -5$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Να γράψετε σε κανονική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς
$z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2\cdot i - z_1$, $z_3 = 2\cdot i + z_1$, $z_4 = \frac{z_3}{z_2}$. (μόρια 8)

Β2). Να τους παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο. Όπου $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$, $\Delta(z_4)$ ποιος από τους τέσσερις βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. και ποιες είναι οι αποστάσεις ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ. (μόρια 8)

Β3). Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $w = \frac{z - 2\cdot i}{z+1}$, όπου $z \neq -1$, $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$.
α). Να γράψετε τον w σε κανονική μορφή.
β). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z , αν (i). ο $w \in R$ (ii). $w \in I$.
(μόρια 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίδεται μιγαδικός $z \neq 1$ και μιγαδικός $w = \frac{2 + i\cdot \bar{z}}{1 - \bar{z}}$.

Γ1). Να δειχθεί ότι $\frac{w-2}{w+i} = \bar{z}$. (μόρια 8)

Γ3). Αν η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1, και Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού w. Να δειχθεί ότι το σημείο M(w) κινείται σε ευθεία, την οποία να βρείτε.
(μόρια 6)

Γ4). Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός να δειχθεί ότι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο Α(1, 0). (μόρια 6)

Γ5). Για z = 2 να δειχθεί ότι ο w^{2004} είναι πραγματικός. (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $z \in C$ και $f(z) = z^2 + 2\cdot z + 3$

Δ1). Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε να ισχύει : $f(x - 2\cdot y\cdot i) = 2$. (μόρια 6)

Δ2). Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 0$. (μόρια 6)

Δ3). Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η εξίσωση $f(z) = \alpha\cdot z + \beta$, να έχει ρίζα τον $1 - 2\cdot i$. (μόρια 8)

Δ4). Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 2\cdot z + 2$ με $Im(z_1) < 0$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = z_1^{53} + \frac{1}{z_1^{74}}$. (μόρια 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 17

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να αναπτύξετε τις παρακάτω έννοιες δίνοντας περιγραφή τους με λόγια , με τύπους και σχήμα.

α). Συζυγής του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$.

β). Μέτρο του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$. (μόρια 10)

Α2). Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις :

α). (1). $z\cdot\bar{z} = \ldots.$ (2). $z + \bar{z} = \ldots$

(3). $z - \bar{z} = \ldots.$ (4). $(-\bar{z})^{\nu} = \ldots$

β). Επιλέξτε σωστό [Σ] ή λάθος [Λ], στα παρακάτω ερωτήματα

(1). Οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 = -1$, όπου $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ έχει λύσεις τους αριθμούς $+1, -1$.

(2). Οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = x + i\cdot y$, $z_2 = \bar{z_1}$, $z_3 = 0$. Σχηματίζουν στο μιγαδικό επίπεδο ισοσκελές τρίγωνο.

(3). Ο αριθμός $z^2 + \bar{z}^2$ είναι πραγματικός. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{1+\alpha\cdot i}{\alpha - i}$, όπου $\alpha \in R$. Να δείξετε ότι :

α). Έχει μέτρο την μονάδα

β). Είναι φανταστικός αριθμός

γ). Αποδείξετε ότι $[z^{2004} + z^{2001}]^8 = 16$. (μόρια 10)

Β2). Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $z = -$ ημθ $+ i\cdot$συνθ , όπου $\theta \in R$

Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z, είναι σημεία του κύκλου με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α, Β, Γ και ισχύει η σχέση $\left|\dfrac{4-3\cdot i}{z_1 - z_2}\right| = \left|\dfrac{3+4\cdot i}{z_2 - z_3}\right| = \left|\dfrac{4+3\cdot i}{z_3 - z_1}\right|$.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (μόρια 10)

Γ2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + i\cdot y$

Αν ισχύει η σχέση : $\left|\dfrac{z-4}{z-2\cdot i}\right| = 2$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). (α). να αποδείξετε ότι αν $|z| = k^2$, $k \in R$ τότε $\bar{z} = \dfrac{k^4}{z}$.

(β). Αν $|z_1| = |z_2| = 1$, αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1 + z_2}{1 - z_1\cdot z_2} \in I$. (μόρια 10)

Δ2). Αν $|z_1| = |z_2| = |z_2| = 1$. να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1|$. (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 18

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). να αποδείξετε ότι : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. (μόρια 8)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή [Σ] ή λάθος [Λ].

1). Αν $z \in C$, με $|z| = 1$, τότε $z = \pm 1$.

2). Αν $z \in C$, με $|z| = 2$, τότε $z \cdot \overline{z} = 2$.

3). Αν $z \in C$, με $|z| = 3$, τότε η εικόνα του z διαγράφει κύκλο. (μόρια 9)

Α3). Δίδεται η εξίσωση $z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$, $z \in C$, με ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2.

α). Να δειχθεί ότι οι αριθμοί β, γ είναι πραγματικοί.

β). Η εξίσωση $z^2 + \beta\cdot z - \gamma = 0$ έχει ρίζες πραγματικές. (μόρια 0)

ΘΕΜΑ Β

Β1). να βρεθεί ο $x \in R$, ώστε ο μιγαδικός $z = \dfrac{x+i}{4+i\cdot x}$, να είναι πραγματικός. (μόρια 10)

Β2). Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda\cdot(1 + 3\cdot i) + (1 + i)$, $\lambda \in R$.

α). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

β). Να βρεθεί ο μιγαδικός z , ο οποίος έχει το μικρότερο μέτρο. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$,

για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ (μόρια 10)

Γ2). Από τους παραπάνω μιγαδικούς , να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1 , z_2 που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο. (μόρια 7)

Γ3). Έστω τρίγωνο ΑΒΓ , όπου οι κορυφές Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 μιγαδικών , για τους οποίους ισχύει $z_3 - z_2 = i\cdot(z_2 - z_3)$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται μιγαδικός $z \neq 2\cdot i$, και έστω $f(z) = \dfrac{5-12\cdot i-2i\cdot z}{z-2\cdot i}$. Επιπλέον $z_1 = z + 3\cdot i$, $z_2 = f(z) + 3\cdot i$.

Δ1). αν $z_1 = z_2$, να βρεθεί ο z_1. (μόρια 8)

Δ2). Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 5 + 2\cdot i$. (μόρια 10)

Δ3). να βρεθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z όταν ο f(z) είναι πραγματικός. (μόρια 7)

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). Να αποδείξετε ότι : $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. (μόρια 3)

β). Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις : (μόρια 2)

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \ldots\ldots$ και $\overline{z^{\nu}}$

Α2). Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί v , u ώστε $\overline{u}\cdot v = u + i$. (μόρια 6)

α). Να αποδείξετε ότι $\overline{v}\cdot u = \overline{u} - i$

β). Να αποδείξετε ότι $u+i \;\cdot\; \overline{u}-i \;\geq 0$

Α3). Επιλέξτε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) για την παρακάτω προτάσεις (μόρια 8)

1). Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2001} = i$.

2). Αν Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών u , w στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x′x είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ τότε ισχύει: $u = \overline{w}$.

3). Αν Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών u , w στο μιγαδικό επίπεδο τότε ισχύει $AB = |u - v| = |v - u|$.

4). Αν για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $z_1 - z_2 = 3\cdot i$, τότε γεωμετρικά βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

5). Αν οι εικόνες δύο μιγαδικών αριθμών έχουν άξονα συμμετρίας τον x′x, τότε έχουν αντίθετο φανταστικό μέρος και είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

6). Δύο αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο μέτρο.

7). Οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \left(\dfrac{\alpha+\beta\cdot i}{\kappa-\lambda\cdot i}\right)^{2014} + \left(\dfrac{\alpha-\beta\cdot i}{\kappa+\lambda\cdot i}\right)^{2014}$, όπου $\alpha, \beta, \kappa, \lambda \in R$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

8). Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = \alpha + \beta\cdot i$, και $z_2 = \beta + \alpha\cdot i$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = -x$.

Α4). Δίνεται η εξίσωση $\alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$, με $\beta^2 < 4\cdot\alpha\cdot\beta$. (μόρια 6)

α). Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης ;

β). Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της, τότε να συμπληρώσετε τις ισότητες :

1). $z_1 + z_2 = \ldots.$ 2). $z_1\cdot z_2 = \ \ldots$

3). $z_1^2 = \ldots\ldots$ 4). $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \ldots\ldots$

5). $z_1^2 + z_2^2 = \ldots$ 6). $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \ldots.$

ΘΕΜΑ Β

Β1). α). Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2\cdot z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι : $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

Β2). Αν z_1 είναι η ρίζα της εξίσωσης του α) ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε την μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου ν για την οποία ο z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός.

Β2). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|2\cdot z_1 - z| = |z_2 - z|$, όπου z_1 είναι η ρίζα του α) ερωτήματος με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό και z_2 η άλλη ρίζα της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Β4). Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς του γ) ερωτήματος έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Να αποδείξετε ότι ένας αριθμός w είναι πραγματικός , αν και μόνο αν ισχύει : $\overline{w} = w$

Γ2). Δίδονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \notin R$ και $w = z + \frac{4}{z}$.

Να αποδείξετε ότι: αν ο αριθμός w είναι πραγματικός , τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z| = 2$. εξαιρουμένων δύο σημείων, τα οποία και να προσδιορίσετε.

Γ3). Αν z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου ερωτήματος. Τότε να αποδείξετε ότι : $\frac{\overline{z_1}}{4} = \frac{1}{z_1}$ και $\frac{\overline{z_2}}{4} = \frac{1}{z_2}$.

Γ4). Αν z_1 , z_2, είναι μιγαδικοί του προηγούμενου ερωτήματος , να αποδείξετε ότι :

$$z_1 + z_2 \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \leq 4.$$

Γ5). Αν z_1, z_2, z_3 είναι τρεις μιγαδικοί του γεωμετρικού τόπου του β) ερωτήματος , τότε να αποδείξετε ότι $\left|\frac{z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 με $Im(z_1)\cdot Im(z_2) \neq 0$ ισχύει $(z_1 - z_2)\cdot(z_1 - \overline{z_2}) \in R$ και οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι $M(z_1)$, $M(z_2)$ αντίστοιχα, τότε να δείξετε ότι τα σημεία M_1, M_2 ισαπέχουν από τον άξονα y′y. (μόρια 9)

Δ2). Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ο αριθμός $w = z \cdot \overline{z} + i + \overline{z} \cdot 1 + i - z + 4$ είναι :

1). πραγματικός αριθμός   2). φανταστικός αριθμός   (μόρια 8)

Δ3). Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $|z-2|^2 + |z-1-i|^2 = 2$. (μόρια 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 20

ΘΕΜΑ Α

Α1). Ποιο σημείο ενός καρτεσιανού επιπέδου λέγεται εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta\cdot i$;

Α2). Έστω ότι $z = \alpha + \beta\cdot i$ και $z_1 = \gamma + \delta\cdot i$. Να συμπληρώσετε την ισοδυναμία: $z = z_1 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

Α3). Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών. Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Α4). Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in R$, τότε να γράψετε τον μιγαδικό $\dfrac{\alpha + \beta\cdot i}{\gamma + \delta\cdot i}$ με τη μορφή $x + y\cdot i$, $x, y \in R$.

Α5). Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του i^{ν} , ν θετικός ακέραιος. Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

ΘΕΜΑ Β

Β1). Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z| = 2$ και $w = (-\sqrt{3} + i)\cdot z$, τότε να βρείτε το γραμμή στην οποία ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w. (μόρια 5)

Β2). Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z| = 2$ και $w = 2\cdot z + \bar{z}$, τότε να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w. (μόρια 10)

Β3). Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία είναι η λύσεις της εξίσωσης:

1). $(z - 2)^6 = 64$

2). $(z - 2)^6 = (z + 4)^6$ (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). 1). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $u = \bar{u}$

2). Αν $|z| = |w| = 1$, τοτε να αποδείξετε ο αριθμός $\dfrac{z + w}{1 + z\cdot w}$ είναι πραγματικός. (μόρια 10)

Γ2). Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 2\cdot i| \le 1$, να βρείτε :

1). ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο.

2). για ποιον από όλους η παράσταση $|z + 2 - 2\cdot i|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει :

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\cdot|z_1|^2 + 2\cdot|z_2|^2$..

Δ2). Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μη μηδενικών μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει

$$\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 + \left|\frac{z_1}{|z_1|} - \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 = 4$$

Δ3). Για το μιγαδικό z ισχύει $|2\cdot z - 1| = |z - 2|$.

α). Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

β). Να αποδείξετε ότι η εικόνα του $\dfrac{1}{z-1}$ ανήκει στην ευθεία $x = -\dfrac{1}{2}$. (μόρια 25)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 21

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση Ο αριθμός $z = \ 1+3\cdot i\ ^4 - \ -1+3\cdot i\ ^4$ είναι :

[Α]. Φανταστικός [Β]. Μηδέν [Γ]. Πραγματικός [Δ]. Τίποτα από τα προηγούμενα.

(μόρια 5)

Α2). Για κάθε μιγαδικό z = α – β·i, α, β ∈ R ισχύει :

$\|z\| = \alpha^2 + \beta^2$	Σ	Λ
$\|z^2\| = \|z\|^2$	Σ	Λ
$z\cdot\bar{z} = z^2$	Σ	Λ
$\|z + 2\cdot i\|^2 = z^2 + 4$	Σ	Λ
$\|z\| = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	Σ	Λ
$z\cdot\bar{z} = \|z\|$	Σ	Λ
$\|z^2\| = z^2$	Σ	Λ
$z\cdot\bar{z} = \|z\|^2$	Σ	Λ
Αν η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με ακτίνα 2, τότε $\|z\| = 2$	Σ	Λ
Αν $\|z\|$ = 3, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με ακτίνα 3.	Σ	Λ

(μόρια 10)

Α3). Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z που αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους :

συνθήκη	Ευθεία
1. $\|z-i\| = \|z+3\cdot i\|$	α). y = x y = x
2. $\|z-1\| = \|z+3\|$	β). x = –1
3. $\|z-2\| = \|z-2\cdot i\|$	γ). y = –1
	δ). y = – x
	ε). x′x

(μόρια 3)

Α4). Δίδεται ο μιγαδικός $w = \dfrac{\alpha + i\cdot\beta}{\beta - i\cdot\alpha}$, να δειχθεί ότι είναι φανταστικός και Να δειχθεί ότι :

$(z^{2001} - z^{1001} + z^{101})^{2004} = 1$. (μόρια 4)

Α5). Αν $|\ |\bar{z}_1| = 2\ |$ και $|-\bar{z}_2| = 5$

α). Ποια είναι η ελαχίστη και η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

β). Ποια είναι η ελαχίστη και η μέγιστη τιμή του $|3\cdot z_1 + 2z_2|$. (μόρια 4)

ΘΕΜΑ Β

Β1). α). Να λύσετε την εξίσωση $(z^2 + 1)\cdot(z^2 - z + 1) = 0$.

Β2). Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$, τότε :

α). να βρείτε την εικόνα του μιγαδικού $z_1^2 - z_1 + 1$.

β). Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$

γ). Να βρείτε τις κοινές ρίζες των εξισώσεων $(z^2 + 1)\cdot(z^2 - z + 1) = 0$ και $z^2 - z^7 + 1 = 0$

(μόρια 10)

Β3). Έστω $z = \dfrac{1 + i\cdot\sqrt{3}}{2}$

α). Να υπολογίσετε τον z^{2000}.

β). Να βρείτε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $z^\nu + (1 - z)^\nu$, όταν $\nu \in N$.

(μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Δίδεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + i\cdot y$, όπου $x, y \in R$. Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z - i}{z + i}$, όπου $z \neq -i$, σε κανονική μορφή.

Γ1). Αν $z \in R$, ποιο είναι το $|w|$; (μόρια 5)

Γ2). Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του z αν $w \in R$; (μόρια 10)

Γ3). Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του z αν $w \in I$; (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in C$ ισχύει η σχέση :

$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3\cdot|z_1|^2 + 3\cdot|z_2|^2 + 3\cdot|z_3|^2$.

(μόρια 10)

Δ2). Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ.

Να αποδείξετε ότι : $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma A)^2 \leq 9\cdot\rho^2$. (μόρια 8)

Δ3). Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 1.

Να βρείτε το $|z_1 + z_2 + z_2|$. (μόρια 6)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 22

ΘΕΜΑ Α

Έστω η εξίσωση $x^2 - 2\cdot x + 3 = 0$ (1)

Α1). Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την (1). (μόρια 10)

Α2). Να αποδείξετε ότι αν z είναι μία οποιαδήποτε λύση της (1) τότε οι εικόνες των μιγαδικών Αριθμών z , $\frac{1}{z}$, – z είναι σημεία συνευθειακά. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Β

Β1). Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση: $\bar{z} = 2 - z$ (1) (μόρια 10)

Β2). Να αποδείξετε ότι αν ο z ικανοποιεί την (1) τότε η εικόνα του $\frac{1}{z}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $K\left(\frac{1}{2},0\right)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $z = \frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$. Να δείξετε ότι :

Γ1). $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$. (μόρια 5)

Γ2). Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $\frac{1}{z^2 - z}$ (μόρια 10)

Γ3). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει $z\cdot\bar{w}+\bar{z}\cdot w=18$ (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \cdots, z_\kappa$ ισχύει $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_\kappa| = 1$, να αποδείξετε ότι :
$|z_1 + z_2 + \cdots + z_k| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_k}\right|$. (μόρια 10)

Δ2). Έστω ότι για τους μιγαδικούς z_1, z_2 , z_3 ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
Να αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1|$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). Αν $\left[\ i^{2}\ {}^{3}\right]^{k}=1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι :

[Α]. 1 [Β]. 3 [Γ]. 2 [Δ]. 6 [Ε]. 5 (μόρια 4)

β). Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z-2|=|z-i|$ είναι :

[Α]. ο άξονας y′y [Β]. η ευθεία y = x [Γ]. ο άξονας x′x
[Δ]. η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2,0) και (0,1)
[Ε]. η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (0,2) και (1,0). (μόρια 4)

Α2). Αν $|z_1|=3$ και $z_2 = 4 + 3\cdot i$, τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1+z_2|$ είναι :

[Α]. 5 [Β]. 8 [Γ]. 9 [Δ]. 12 [Ε]. 14 (μόρια 5)

Α3). Αν z = $-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, να αντιστοιχήσετε όλα τα στοιχεία της στήλης Α σε στοιχεία της στήλης Β συμπληρώνοντας στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\left\lvert\dfrac{1}{z_1}\right\rvert$	1). 0 2). 1 3). 2
Β. $1-\lvert z^{20}\rvert$	4). $\dfrac{1}{2}$
Γ. $\left\lvert\dfrac{\bar{z}^{31}}{2\cdot\lvert -z^2\rvert}\right\rvert$	5). 4 6). 3

(μόρια 3)

Α4). Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

1). Αν M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο τότε $(M_1M_2) = |z_2 - z_1|$.

2). Αν $z \in C$ τότε $|z^2| - |\bar{z}|^2 = 0$.

3). Αν $|\bar{z}_1| = 2$ και $|-z_2| = 4$, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2| = 2$.

4). Αν η εξίσωση $\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, α, β, $\gamma \in R$ έχει ρίζα το $\dfrac{4}{1+i\cdot\sqrt{3}}$, τότε θα έχει ρίζα και το $1 + i\cdot\sqrt{3}$

(μόρια 9)

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z \neq 0$.

Β1). Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z} \leq 2$ (μόρια 10)

Β2). Να εξετάσετε πότε στην παραπάνω ανισότητα ισχύει το ίσον (Δύο περιπτώσεις). (μόρια 8)

Β3). Έστω $A = A(z) = |1 + z|^2 + |1 - z|^2$.

α). Αν $|z| = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

β). Έστω S το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $A(z - 5 - 3\cdot i) = 10$.
Να βρείτε ποιος μιγαδικός από το S, έχει ελάχιστο μέτρο. (μόρια 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x+\frac{1}{x}=1$ (1)

Γ1). Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση (1). (μόρια 5)

Γ2). Έστω z μία οποιαδήποτε ρίζα της την εξίσωσης (1).

(α). Να αποδείξετε ότι ισχύει $z^3 = -1$.

(β). Να υπολογίσετε την παράσταση: $z^0 + z^9 + z^{18}$. (μόρια 10)

Γ3). Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει: $\sqrt{2}\cdot|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$ (2) (μόρια 5)

Γ4). Έστω S το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους η σχέση (2) ισχύει σαν ισότητα.

(α). Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $z \in S$.

(β). Έστω $z \in S$ διάφορος του 0. Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $\bar{z}$ και $\frac{1}{z}$ επίσης ανήκουν στο 5. (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν ισχύει για τον μιγαδικό z ότι : $|z - 3\cdot i| + |z + 4| = 5$, να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z. (μόρια 10)

Δ2). Αν ισχύει $|z - 3\cdot i|^2 + |z + 4|^2 = 5^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την σχέση και να αποδείξετε ότι $|z| = 5$. (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 24

ΘΕΜΑ Α

Α1). Αν z, z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1 . z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. (μόρια 5)

Α2). Επιλέξτε για τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

α). Αν $z \in C$, τότε να αποδείξετε ότι $|z|^2 = z\cdot \bar{z}$

β). Αν $z \in C$, τότε ισχύει ότι $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ (μόρια 4)

Α3). Να συμπληρώσετε τις ισότητες : 1). $\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots.$ 2). $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \ldots\ldots$ (μόρια 4)

Α4). Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $|z_1 + z_2|$ και $|z_1| + |z_2|$. (μόρια 5)

Α5). Αν M_1,M_2 οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε με τι ισούται το μέτρο της διαφοράς $z_1 - z_2$; Η απάντηση να δικαιολογηθεί. (μόρια 7)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς ζ της μορφής $z = \frac{1+x\cdot i}{x+i}$, $x \in R$ (1)

Έστω Μ ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

Β1). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο Μ. (μόρια 10)

Β2). (α). Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο του Μ είναι εικόνα ενός μιγαδικού της μορφής (1).

(β). Έστω $\alpha \in R$ με $\alpha \neq \pm 1$. Έστω ότι η εικόνα του μιγαδικού $w \neq \frac{\alpha - i}{1-\alpha\cdot i}$ ανήκει στο Μ.

Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του μιγαδικού $\frac{w-\alpha}{\alpha\cdot w - 1}$ ανήκει στο Μ. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση $z - \bar{z} = 6\cdot i$

Γ1). Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των αριθμών του Α. (μόρια 10)

Γ2). Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in A$ ο μιγαδικός αριθμός $\frac{1}{z} + \frac{1}{6}\cdot i$, έχει σταθερό μέτρο.

(μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Να λυθεί το σύστημα : $\begin{Bmatrix} |z-3\cdot i| = |z+i| \\ |z-i| = |z-1| \end{Bmatrix}$ (μόρια 12)

Δ2). Αν $\alpha > 0$ και z,w μιγαδικοί αριθμοί να δειχτεί ότι : $1+\alpha \quad \cdot|z|^2 + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot|w|^2 \geq |z+w|^2$

(μόρια 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 25

ΘΕΜΑ Α

Έστω ν φυσικός αριθμός.

Α1). Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu} + i^{-\nu}$; (μόρια 9)

Α2). Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(i^{\nu} + i^{-\nu})\cdot(i^{\nu-1} + i^{-\nu})$ (μόρια 10)

Α3). Να αντιστοιχήσετε τους γεωμετρικούς τόπους της στήλης Α στη σχέση της στήλης Β, συμπληρώνοντας στο τετράδιό σας τον πίνακα ΙΙ.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α). Κύκλος κέντρου Κ(2,1) και ακτίνας 3. Β). Μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, –1). Γ). Κύκλος κέντρου (0, 0) και ακτίνας 3.	1). $\|z+2+i\|=3$ 2). $\|z\|=3$ 3). $\|z-2-i\|=3$ 4). $\|z+2\|=\|z-i\|$ 5). $\|z-2\|=\|z+i\|$

(μόρια 6)

ΘΕΜΑ Β

Αν ο μιγαδικός αριθμός z έχει μέτρο ίσο με την μονάδα.

Β1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $w = \dfrac{\bar{z}+2}{\bar{z}}$. (μόρια 15)

Β2). Να νρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z από τις εικόνες των μιγαδικών w. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Αν η εικόνα του μιγαδικού z, κινείται σε κύκλο με κέντρο Κ(0, 0) και ακτίνα ρ = 2.

Γ1). Να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z + \dfrac{4}{\bar{z}}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

Γ2). Να δείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w παραμένει σταθερή.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Αν z_1 και z_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης $|z - 2\cdot i| = 1$, τότε να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$ είναι 2. (μόρια 12)

Δ2). Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z + 8| + |z - 8| = 20$, να δειχτεί ότι $|4\cdot z - \bar{z}| = 30$. (μόρια 13)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 26

ΘΕΜΑ Α

Έστω ν φυσικός αριθμός.

Α1). Να υπολογίσετε το i^{ν}, για τις διάφορες τιμές τού $\nu \in N^{*}$. (μόρια 9)

Α2). Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + i\cdot\beta$, με $\alpha, \beta \in R$. Τι ονομάζουμε εικόνα του z; (μόρια 10)

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z - \bar{z} = 2\cdot\mathrm{Im}(z)$.

γ). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = |\bar{z}|$.

δ). Η εξίσωση $|z - z_0| = 2\cdot\rho$, $\rho > 0$, παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ. (μόρια 6)

ΘΕΜΑ Β

Αν $(1 + i)\cdot z - i\cdot w = 3 + 2\cdot i\cdot \bar{w}$, να βρείτε τους z και w όταν :

Β1). Ο z είναι πραγματικός και ο w φανταστικός. (μόρια 7)

Β2). Οι z, w είναι μιγαδικοί συζυγείς. (μόρια 8)

Β3). Οι εικόνες των z, w είναι σημεία του άξονα x′x. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, που ικανοποιούν την σχέση $|i\cdot z + 2| + |\bar{z} + 2\cdot i| = 2$. (μόρια 10)

Γ2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w. Που ικανοποιούν την σχέση $\left|\dfrac{w-1}{w-3}\right| = 1$. (μόρια 10)

Γ3). Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w. (μόρια 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2 + i\cdot\bar{z}}{1-\bar{z}}$, με $z \neq 1$.

Δ1). Να δείξετε ότι : $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = |z|$. (μόρια 8)

Δ2). Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον μοναδιαίο κύκλο. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών f(z). (μόρια 9)

Δ3). Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w. (μόρια 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 27

ΘΕΜΑ Α

Α1). Έστω η εξίσωση $\alpha\cdot z^2 + \beta\cdot z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in R^*$ και $\alpha \neq 0$. Αν η διακρίνουσα της εξίσωσης $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma$, είναι αρνητική, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. (μόρια 10)

Α2). Τι ορίζουμε ως μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + i\cdot y$, με $x, y \in R$; (μόρια 7)

Α3). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α). Για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $\overline{z_1 \cdot z_2} = -z_1 \cdot z_2$.

β). Για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

γ). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

δ). Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$. (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Β

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 0$, να αποδείξετε ότι:

Β1). $z_2 = i\cdot z_1$ ή $z_2 = -i\cdot z_1$. (μόρια 5)

Β2). $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|z_1 - z_2|$. (μόρια 10)

Β3). Αν $z_1 \neq z_2$, τότε το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι μιγαδικοί v, w τέτοιοι ώστε $\left|v - \frac{1}{2}\right| = 1$ και $2\cdot v\cdot w = w + 2\cdot i$.

Γ1). Να βρείτε το $|w|$. (μόρια 5)

Γ2). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z για τους οποίους ισχύει $(2\cdot z - i)\cdot(2\cdot \bar{z} + i) = \bar{w}\cdot w$. (μόρια 10)

Γ3). Να αποδείξετε ότι $|v - w| \leq \frac{5}{2}$. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 3\cdot i| = 2\cdot|z|$. (μόρια 10)

Δ2). Αν $\left|1 - \frac{3\cdot i}{z_1}\right| = \left|1 - \frac{3\cdot i}{z_2}\right| = 2$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$. (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 28

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η σχέση $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

(μόρια 13)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α). Οι εικόνες δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β). Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $z^2 + w^2 = 0$, τότε $z = w = 0$.

γ). Αν $z = x + i\cdot y$, $x, y \in R$ τότε $|z| = \sqrt{x^2 + \ y\cdot i\ ^2}$.

δ). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = |z^2|$. (μόρια 12)

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε $w – z = 2\cdot Re(z) + i$, και Μ, Ν οι αντίστοιχες εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Β1). Να αποδείξετε ότι όταν το Μ κινείται στην ευθεία (ε) : $y = 3\cdot x + 5$, τότε το Ν κινείται επίσης σε ευθεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας. (μόρια 10)

Β2).Αν το σημείο Μ συμπέσει με το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών να υπολογίσετε το $|z – w|$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει : $\left|z_1+\overline{z_2}\right|=\left|\overline{z_1}-z_2\right|$. Να αποδείξετε ότι :

Γ1). $z_1\cdot z_2+\overline{z_1\cdot z_2}=0$. (μόρια 6)

Γ2). Ο z_1, z_2 είναι φανταστικός. (μόρια 9)

Γ3).Αν ο z_2 είναι σταθερός, τότε η εικόνα του z_1, ανήκει σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (μόρια 10)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|4\cdot z – 1| = 2\cdot|z|$, να βρείτε :

Δ1). Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z. (μόρια 8)

Δ2).Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $\dfrac{1}{z}$. (μόρια 8)

Δ3). Την ελάχιστη τιμή του $\left|\dfrac{z^2-1}{z}\right|$. (μόρια 9)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 29

ΘΕΜΑ Α

Α1). Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς ισχύει η σχέση $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (μόρια 13)

Α2). Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α). Για όλους τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

β). Για κάθε φυσικό αριθμό κ ισχύει $i^{4\cdot k+3} = i$.

γ). Αν $|z_1| = |z_2|$, τότε $z_1 = \pm z_2$.

δ). Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

(μόρια 12)

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $z - 4 - 4\cdot i = \dfrac{4}{\overline{z} - 4 + 4\cdot i}$.

Β1). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. (μόρια 10)

Β2). Ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς έχει ελάχιστο και ποιος μέγιστο μέτρο ; (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιος ώστε $(4 + 7\cdot i)^\nu = (7 - 4\cdot i)^\nu$.

Γ1). Να αποδείξετε ότι $\nu = 4\cdot\kappa$, με $\kappa \in \mathbb{N}^*$. (μόρια 10)

Γ2).Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν για την οποία ισχύει $(1 + i)^\nu = \left(i\cdot\sqrt{2}\right)^\nu$. (μόρια 15)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για το μιγαδικό z ισχύει η σχέση $\left|1 - \dfrac{1}{z^2}\right| = \dfrac{|z^2 - i|}{z\cdot\overline{z}}$, τότε :

Δ1). Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Im}(z^2)$. (μόρια 10)

Δ2).Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z^2 - 1|$. (μόρια 15)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ 30

ΘΕΜΑ Α

Α1). α). i). Διατυπώστε περιγραφικά την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2. (μόρια 3)

ii).Διατυπώστε και αποδείξτε $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$. (μόρια 10)

β). Αντιστοιχείστε κάθε ισότητα ή ανισότητα από την στήλη Α, στην λεκτική περιγραφή του αντίστοιχου γεωμετρικού τόπου που αυτή παριστάνει στη στήλη Β:

Στήλη Α.	Στήλη Β.
α). $\lvert z - 1\rvert = \lvert z - i\rvert$	1). Κυκλικός δακτύλιος.
	2). Η ευθεία $y = \sqrt{3}\cdot x$.
β). $\lvert z - 1\rvert = 2\cdot\lvert z\rvert$	3). Κύκλος.
	4). Ημιευθεία χωρίς το (0, 0).
γ). $(z - 1)^{2004} = (z + 1)^{2004}$	5). Η ευθεία y = x.
	6). Ο άξονας x′x.
δ). $1 \le \lvert z - i\rvert \le 2$	7). Ο άξονας y′y.

(μόρια 12)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq -1$ και ο $w = \dfrac{z-5}{z+1}$.

Β1). Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός. (μόρια 9)

Β2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z αν $|w| = 2$. (μόρια 8)

Β3). Αν $|w| = 2$ τότε να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - 1 - 3\cdot i|$ (μόρια 8)

ΘΕΜΑ Γ

Αν ισχύει $(\alpha + i\cdot\beta)^{2006} = \dfrac{3+4i}{5}$, α, β $\in$ R, τότε :

Γ1). Δείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. (μόρια 7)

Γ2). Βρείτε τον μιγαδικό $z = (\beta + i\cdot\alpha)^{2006}$. (μόρια 9)

Γ3). Αν $w = \alpha + i\cdot\beta + \dfrac{1}{\alpha + i\cdot\beta}$, δείξτε ότι $w \in R$. (μόρια 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι ώστε να ισχύει $w\cdot z = z + 3 + (w - 1)\cdot i$.

Αν η εικόνα του w βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο.

Δ1). Να βρεθεί η γραμμή στην οποία βρίσκεται η εικόνα του z. (μόρια 9)

Δ2). Να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης $|z - w|$. (μόρια 9)

Δ3). Αν $z_1, z_2 \in C$ και βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$. (μόρια 7)